

۱۴۰۲ نوبت اول

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۸	۸	۱۶	۸	۲	۲۲	۱۶
فیزیک	۸	۱۰	۱۵	۲	۵	۲۲	۸
شیمی	۵	۹	۱۲	۴	۸	۱۹	۳

ریاضیات

۱- گزینه ۲

استراتژی سه جمله متوالی دنباله هندسی را aq و aq^2 در نظر بگیرید. با ضرب این جملات در ۴، ۸، ۱۶ سه جمله $4a$ ، $8aq$ و $16aq^2$ تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند؛ پس $4a + 16aq^2 = 2(8aq)$ می‌شود که با به دست آوردن مقدار q از این معادله، جواب به سادگی به دست می‌آید.

درس‌نامه اگر a ، b و c تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، داریم: $a + c = 2b$

گام ۱ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی را a ، aq و aq^2 در نظر می‌گیریم. با ضرب این جملات در ۴، ۸ و ۱۶، سه جمله $4a$ ، $8aq$ و $16aq^2$ حاصل می‌شود. به گفته سؤال این سه جمله، یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند، پس با توجه به درس‌نامه داریم:

$$4a + 16aq^2 = 2(8aq) \Rightarrow 4a + 16aq^2 = 16aq$$

$$\xrightarrow{-4a} 1 + 4q^2 = 4q \Rightarrow 4q^2 - 4q + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2q - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

گام ۲ $q = \frac{1}{2}$ است، پس سه جمله دنباله هندسی و سه جمله دنباله حسابی به صورت زیر می‌شوند:

$$a, aq, aq^2 \xrightarrow{q=\frac{1}{2}} a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a$$

$$4a, 8aq, 16aq^2 \xrightarrow{q=\frac{1}{2}} 4a, 4a, 4a$$

گام ۳ مجموع مربعات سه جمله دنباله هندسی برابر مجموع جملات دنباله حسابی است، پس باید بنویسیم:

$$a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2 = (4a) + (4a) + (4a)$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16}a^2 = 12a \Rightarrow \frac{17}{16}a^2 = 12a \Rightarrow \frac{17}{16}a = 12 \Rightarrow a = \frac{64}{17}$$

پس جمله اول دنباله هندسی، $\frac{64}{17}$ است.

۲- گزینه ۴

استراتژی کافی است طول و عرض رأس سهمی $y = kx^2 - 4x - 6$ را به جای x و y خط $y = -4x - 4$ قرار دهیم.

درس‌نامه در سهمی $y = ax^2 + bx + c$:

(الف) طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

(ب) عرض رأس سهمی برابر است با:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a}$$

گام ۱ با توجه به درس‌نامه، طول و عرض رأس سهمی $y = \frac{k}{2}x^2 - 4x - 6$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{طول رأس } x_S = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k}$$

$$\text{عرض رأس } y_S = -\frac{16 + 24k}{4k} = -\frac{4 + 6k}{k} = -\frac{4}{k} - \frac{6k}{k} = -\frac{4}{k} - 6$$

گام ۱ رأس سهمی، روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد، پس می‌توانیم $x = x_S = \frac{2}{k}$ و $y = y_S = -\frac{4}{k} - 6$ را در ضابطه این خط جای گذاری کنیم:

$$y = -4x - 4 \Rightarrow -\frac{4}{k} - 6 = -4\left(\frac{2}{k}\right) - 4 \Rightarrow -\frac{4}{k} - 6 = -\frac{8}{k} - 4$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} \frac{4}{k} + 6 = \frac{8}{k} + 4 \Rightarrow 6 - 4 = \frac{8}{k} - \frac{4}{k} \Rightarrow 2 = \frac{4}{k} \Rightarrow k = 2$$

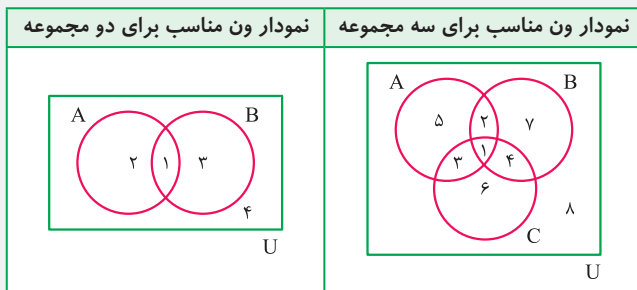
گام ۲ حالا با جای گذاری $k = 2$ در $y_S = -\frac{4}{k} - 6$ ، عرض رأس سهمی به دست می‌آید:

$$y_S = -\frac{4}{2} - 6 = -2 - 6 = -8$$

۳- گزینه ۱

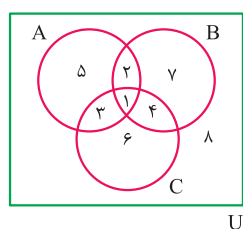
درس‌نامه بعضی وقت‌ها یک عبارت مجموعه‌ای (نسبتاً) طولانی به ما می‌دهند و می‌گویند، این عبارت با کدام مجموعه برابر است (یا کدام گزینه درست است). برای حل کردن این سؤالات، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

(الف) می‌بینیم عبارت صورت سؤال چند مجموعه دارد (معمولاً یا ۲ تا ۳). در ادامه مطابق جدول زیر، نمودار ون مناسب را می‌کشیم و قسمت‌های مختلفش را شماره گذاری می‌کنیم:



(ب) حالا عبارت صورت سؤال را برحسب شماره‌ها بازنویسی می‌کنیم، مثلاً در حالتی که سه مجموعه داشته باشیم، طبق جدول بالا به جای A ، $\{1, 2, 3, 5\}$ و در حالتی که دو مجموعه داشته باشیم به جای A ، $\{1, 2\}$ را می‌نویسیم.

گام ۱ چون با سه مجموعه A ، B و C طرفیم، پس طبق درس‌نامه، نمودار ون را به این صورت می‌کشیم:



گام ۲ حالا عبارت $((A - B)' - (B - C)) - C$ را برحسب شماره‌ها می‌نویسیم:

$$((\{1, 2, 3, 5\} - \{1, 2, 4, 7\})' - (\{1, 2, 3, 6\} - \{1, 2, 4, 7\})) - \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$= (\{3, 5\}' - \{2, 7\}) - \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$= (\{1, 2, 4, 6, 7, 8\} - \{2, 7\}) - \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$= \{1, 4, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, 4, 6\} = \{7, 8\}$$

گام ۳ حالا گزینه‌ها را برحسب شماره‌ها می‌نویسیم تا ببینیم در کدامشان به $\{8\}$ می‌رسیم:

$$A' - (B \cup C) = \{7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 6, 7\} = \{8\}$$

پس ① درست است.

مشاوره از «جبر مجموعه‌ها» معمولاً یک تست در کنکور می‌آید. درس‌نامه این سؤال را یاد بگیرید تا یک تست را برای خودتان ذخیره کنید.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + 6x + m = 0 \\ x^2 + 2x - 3m = 0 \end{cases} \xrightarrow{m=\Delta} \begin{cases} x^2 + 6x + \Delta = 0 \\ x^2 + 2x - 3\Delta = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x+\Delta) = 0 \\ (x-3)(x+\Delta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\Delta \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = -\Delta \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

۶- گزینه ۴

نکته ۴: برای این که ببینیم در چه بازه‌ای، نمودار تابع $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ ، بین دو خط افقی $y = 0$ و $y = -2$ قرار دارد، کافی است نامعادله $0 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} < -2$ را حل کنیم.

جدول تعیین علامت می کشیم:

حالا سمت چپ نامعادله را حل می‌کنیم:

$$-2 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow \frac{2}{x^2 - 3x + 2} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{2 + 2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 3x + 2} > 0.$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 6x + 6}{x^2 - 3x + 2} > 0.$$

$$\begin{array}{ccccc} & + & - & + & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) & & & & \end{array} \quad (II)$$

مجموعه جواب نامعادله تهی است، یعنی هیچ مقدار صحیحی در این نامعادله صدق نمی‌کند.

تیزبازی  نیازی به حل کردن نامعادله سمت چپ نبود. با حل کردن سمت راست نامعادله، بازه $(۱, ۲)$ برای x به دست آمد. در اشتراک گرفتن هم قرار نیست عضوی به بازه اضافه شود (برعکس امکان دارد به پیراییم منف بشه!)

چون بازه $(۱, ۲)$ شامل هیچ عدد صحیحی نیست، پس بعد از اشتراک هم هیچ عدد صحیحی ندارد. در نتیجه مجموعه جواب نامعادله $۰ < \frac{۲}{x^2 - 3x + 2} < -۲$ هم شامل هیچ عدد صحیحی نیست و جواب صفر می‌شود!

۷- گزینه ۳

(الف) $\square \vee \sim \square \equiv \text{د}$
 عینِ ہم
 (ب) $\square \wedge \square \equiv \square, \square \wedge \square \equiv \text{ن}$
 (پ) $\square \wedge (\triangle \wedge \bigcirc) \equiv (\square \wedge \triangle) \wedge \bigcirc$
 (ت) $\sim (\square \vee \triangle) \equiv \sim \square \wedge \sim \triangle$
 (ث) $(\square \wedge p) \vee (\bigcirc \wedge p) \equiv (\square \vee \bigcirc) \wedge p$
 فاکتور از ($\wedge$) پ

$$\underbrace{[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)]}_A \vee \underbrace{(q \wedge r \vee (p \wedge r))}_B$$

مثال ۱۰: $A: (\sim p \wedge \sim q) \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge r$

حالا نوبت ساده کردن B است. طبق هم‌ارزی (ث) می‌توانیم از « $\wedge r$ » فاکتور بگیریم:

طبق هم‌ارزی (ث) از « $\wedge$ » فاکتور می‌گیریم:

$$[(p \vee q) \vee (p \vee q)] \wedge r \equiv \Delta r \equiv r$$

هم‌ارزی (ب)
طبق هم‌ارزی (الف) همیشه درست است

همان‌طور که می‌بینید وقتی Γ نادرست باشد، مهم نیست p و q چه ارزشی دارند، کل عبارت نادرست می‌شود؛ پس گزینه‌ای درست است که وقتی Γ نادرست باشد، کلاً نادرست بشود. واضح است که این اتفاق فقط برای گزاره « Γ » در (۲) می‌افتد.

۵- گزینه ۳

مقدار ریشه مشترک و مقدار m به دست آید. در آخر با جای گذاری مقدار m و حل دو معادله درجه دوم حاصل، مقدار ریشه های غیر مشترک هم به دست می آید.

$$\{g(x) = 0$$
$$\begin{aligned} \begin{cases} x^r + 6x + m = 0 \\ x^r + 7x - 3m = 0 \end{cases} &\Rightarrow \times r \begin{cases} 3x^r + 11x + 3m = 0 \\ x^r + 7x - 3m = 0 \end{cases} \\ \xrightarrow{\text{جمع}} 4x^r + 4x = 0 &\Rightarrow 4x(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (red X)} \\ x = -1 \text{ (green checkmark)} \end{cases} \end{aligned}$$

نکته: ریشه مشترک دو معادله $x = -5$ است، پس حق داریم آن را در یکی از معادله‌های $x^2 + 6x + m = 0$ یا $x^2 + 2x - 3 = 0$ جای گذاری کنیم تا مقدار m به دست آید:

$$x^2 + 6x + m = 0 \xrightarrow{x=-5} 25 - 30 + m = 0 \Rightarrow m = 5$$



گام ۱ پس $g^{-1}(f^{-1}(0)) = g^{-1}(3)$ می‌شود. برای به دست آوردن $g^{-1}(3)$ ، معادله $g(x) = 3$ را حل می‌کنیم:

$$g(x) = 3 \Rightarrow x + \sqrt{2x-4} = 3 \Rightarrow \sqrt{2x-4} = 3-x \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x-4 = x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-8x+13=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=12} \begin{cases} x = \frac{8+\sqrt{12}}{2} = 4+\sqrt{3} \quad \times \\ x = \frac{8-\sqrt{12}}{2} = 4-\sqrt{3} \quad \checkmark \end{cases}$$

$x = 4-\sqrt{3}$ ، بنابراین $x = 4+\sqrt{3}$ «غ.ق.ق» است چون در تساوی $(*)$ صدق نمی‌کند، و در نتیجه $g^{-1}(3) = 4-\sqrt{3}$ است.

۹- گزینه ۱

استراتژی با توجه به این که $f^{-1}(10) = -1$ است، $f(-1) = 10$ می‌شود. از طرفی دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول ۱ متقاطع‌اند که در این صورت $f(1) = g(1)$ می‌شود. با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به دست آمده از این دو معادله، مقادیر a و b به دست می‌آیند.

$$f^{-1}(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f(\beta) = \alpha$$

۲ اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ متقاطع باشند، $f(\alpha) = g(\alpha)$ می‌شود.

$$a \text{ (cloud)} = a \text{ (square)} \Rightarrow \text{cloud} = \text{square}$$

گام ۱ نمودار f ، نمودار g را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، $f(1) = g(1)$ می‌شود:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow 2 + 2^{b-a} = -1 - 3 + 8 \Rightarrow 2 + 2^{b-a} = 4$$

$$\Rightarrow 2^{b-a} = 2^1 \Rightarrow b-a = 1 \quad (I)$$

گام ۲ از $f^{-1}(10) = -1$ ، طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم نتیجه بگیریم $f(-1) = 10$ است:

$$f(-1) = 10 \Rightarrow 2 + 2^{b+a} = 10 \Rightarrow 2^{b+a} = 8 = 2^3 \Rightarrow b+a = 3 \quad (II)$$

گام ۳ حالا دستگاه دو معادله و دو مجهول حاصل از رابطه‌های (I) و (II) را حل می‌کنیم تا مقادیر a و b به دست بیایند:

$$\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2b=4 \Rightarrow b=2$$

با جای گذاری $b=2$ در $b-a=1$ ، a را هم حساب می‌کنیم: $b-a=1 \Rightarrow a=1$ پس $2b-a = 2 \times 2 - 1 = 3$ می‌شود.

۱۰- گزینه ۴

استراتژی اول $x^3 + 8$ را با استفاده از اتحاد جاق و لاغر باز کنید، بعد با مخرج مشترک گیری و طرفین وسطین، جواب را به دست آورید.

درس‌نامه ۱ اتحاد جاق و لاغر به صورت زیر است:

$$A^2 \pm B^2 = (A \pm B)(A \mp AB + B^2)$$

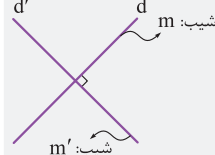
۲ برای فهمیدن علامت ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، باید حواسمان به سه چیز باشد: Δ ، مجموع ریشه‌ها (همان $S = -\frac{b}{a}$) و حاصل ضرب ریشه‌ها (همان $P = \frac{c}{a}$). خوب است یک بار همه حالت‌های ممکن برای علامت ریشه‌ها را در جدول زیر ببینید:

شرط(ها)	علامت ریشه‌ها
$\Delta < 0$	معادله ریشه ندارد.
$\Delta = 0$ و $S > 0$	معادله ریشه مضاعف مثبت دارد.
$\Delta = 0$ و $S < 0$	معادله ریشه مضاعف منفی دارد.
$\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$	معادله دو ریشه متمایز مثبت دارد.
$\Delta > 0$ و $S < 0$ و $P > 0$	معادله دو ریشه متمایز منفی دارد.
$P < 0$	معادله دو ریشه مختلف‌العلامت (یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی) دارد.

درس‌نامه ۱ شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۲ اگر دو خط d و d' بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 می‌شود:

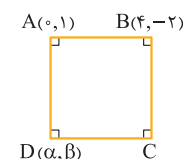


$$\Rightarrow m \cdot m' = -1 \text{ یا } m = -\frac{1}{m'}$$

۳ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

گام ۱ ابتدا یک شکل فرضی برای سؤال رسم می‌کنیم:



فرض کنید مختصات نقطه D ، $D(\alpha, \beta)$ است. نقطه D

در ربع سوم قرار دارد، پس α و β هر دو منفی هستند.

گام ۲ شیب دو خط AB و AD را به کمک مورد (۱) درس‌نامه، به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{A(0,1)}{B(4,-2)} = \frac{-2-1}{4-0} = -\frac{3}{4}$$

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{A(0,1)}{D(\alpha,\beta)} = \frac{\beta-1}{\alpha-0} = \frac{\beta-1}{\alpha}$$

این دو خط بر هم عمودند، پس حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 می‌شود (طبق مورد (۲) درس‌نامه):

$$-\frac{3}{4} \times \frac{\beta-1}{\alpha} = -1 \Rightarrow \frac{\beta-1}{\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta-1 = \frac{4}{3}\alpha \quad (*)$$

گام ۳ طول دو پاره‌خط AB و AD را به کمک مورد (۳) درس‌نامه، به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\frac{A(0,1)}{B(4,-2)} \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \frac{A(0,1)}{D(\alpha,\beta)} \sqrt{(\alpha-0)^2 + (\beta-1)^2}$$

طول اضلاع مربع برابرند، پس $AD = AB$ می‌شود:

$$\sqrt{\alpha^2 + (\beta-1)^2} = 5$$

گام ۴ حالا با توجه به $(*)$ ، به جای $\beta-1$ در تساوی بالا، قرار می‌دهیم $\frac{4}{3}\alpha$:

$$\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{4}{3}\alpha\right)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \frac{16}{9}\alpha^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{9}\alpha^2} = 5 \Rightarrow \left|\frac{5}{3}\alpha\right| = 5$$

در گام ۱ گفتیم α منفی است، پس $\left|\frac{5}{3}\alpha\right| = -\frac{5}{3}\alpha$ می‌شود: $-\frac{5}{3}\alpha = 5 \Rightarrow \alpha = -3$ بنابراین طول نقطه D ، -3 است.

۸- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ $\log_b a = c \Leftrightarrow a = b^c$

۲ برای تابع f داریم:

$$f^{-1}(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f(\beta) = \alpha$$

بنابراین برای محاسبه $f^{-1}(\alpha)$ ، کافی است معادله $f(x) = \alpha$ را حل کنیم که جوابش همان خواسته ما یعنی $f^{-1}(\alpha)$ می‌شود.

۳ برای این که ببینیم تابع $y = f(x)$ در کدام نقطه محور y ها را قطع می‌کند، کافی است به جای x قرار دهیم صفر، به عبارت دیگر تابع $y = f(x)$ در $f(0)$ محور y ها را قطع می‌کند.

گام ۱ طبق مورد (۳) درس‌نامه، نمودار $y = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ در $y = g^{-1}(f^{-1}(0))$ محور y ها را قطع می‌کند.

گام ۲ ابتدا باید مقدار $f^{-1}(0)$ را به دست آوریم. برای این کار طبق مورد (۲) درس‌نامه، معادله $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log_2(2x-5) = 0 \Rightarrow 2x-5 = 10^0 = 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین:

$$f^{-1}(0) = 3$$



پ) $a = \frac{\max + \min}{2}$

ت) $T = \frac{2\pi}{|c|}$

ث) در قله‌ها یا دره‌های نمودارهای سینوسی یا کسینوسی (قله و دره)، مقدار $\sin(cx+d)$ یا $\cos(cx+d)$ ، برابر ± 1 می‌شود.

۲) برای به دست آوردن دوره تناوب یک تابع سینوسی یا کسینوسی از روی نمودار، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

یک تناوب کامل	نصف تناوب	یک چهارم تناوب

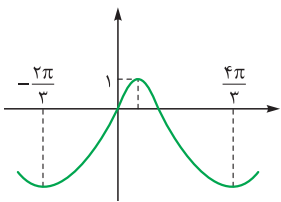
۳) اگر تابع f در $x = \alpha$ صعودی باشد، $f'(\alpha) > 0$ و اگر نزولی باشد، $f'(\alpha) < 0$ می‌شود.

۴) مشتق $\cos(u)$ برابر $-u' \sin(u)$ می‌شود.

کام ۱) نمودار تابع از مبدأ مختصات (نقطه $(0,0)$) می‌گذرد؛ پس:

$$y = a + b \cos\left(cx - \frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{(0,0)} 0 = a + b \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)} 0 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = -2a \quad (*)$$



کام ۲) با توجه به نمودار تابع، واضح است که

$\min + \max$ در این تابع منفی است، حالا با توجه

به قسمت (پ) درس‌نامه، $a = \frac{\max + \min}{2}$ است،

پس علامت a منفی می‌شود.

کام ۳) حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است:

$$\max = a + |b| = 1$$

با توجه به $(*)$ ، می‌توانیم به جای b قرار دهیم $-2a$:

$$a + |-2a| = 1$$

a منفی است، پس $-2a$ مثبت می‌شود، بنابراین به جای $|-2a|$ در تساوی بالا می‌نویسیم مثبت:

$$\begin{cases} a - 2a = 1 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \\ b = -2a = -2 \times (-1) = 2 \end{cases}$$

کام ۴) حالا ضابطه تابع را دوباره می‌نویسیم:

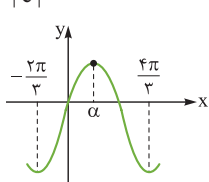
$$y = a + b \cos\left(cx - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y = -1 + 2 \cos\left(cx - \frac{\pi}{3}\right)$$

طبق مورد (۱-ت) درس‌نامه، دوره تناوب این تابع برابر $\frac{2\pi}{|c|}$ است، از طرفی با توجه به نمودار تابع،

$$T = \frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

$$\text{از } x = -\frac{2\pi}{3} \text{ تا } x = \frac{4\pi}{3} \text{ یک تناوب کامل داریم، پس } \frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi$$

و در نتیجه:



کام ۵) حالا برای این که علامت c را بفهمیم، دو روش داریم:

روش ۱) همان‌طور که در نمودار مقابل می‌بینید، α دقیقاً وسط

$$\alpha = \frac{-\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}}{2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

است، پس $\frac{4\pi}{3}$ و $-\frac{2\pi}{3}$ می‌شود.

کام ۶) اول $x^2 + 8$ را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر باز می‌کنیم:

$$x^2 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

کام ۷) در معادله اصلی به جای $x^2 + 8$ قرار می‌دهیم $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$ و

مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} - \frac{x^2 - 9x - 2}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} &= \frac{6x}{x^2 - 2x + 4} \\ \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} - \frac{x^2 - 9x - 2}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} &= \frac{6x(x+2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \\ \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 + 9x + 2}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} &= \frac{6x^2 + 12x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \end{aligned}$$

مخرج‌های دو طرف را خط می‌زنیم: $7x + 6 = 6x^2 + 12x \Rightarrow 6x^2 + 5x - 6 = 0$

کام ۸) حالا باید علامت ریشه‌های معادله $6x^2 + 5x - 6 = 0$ را به دست آوریم. در این

معادله، $P = \frac{c}{a} = \frac{-6}{6} = -1$ ، یعنی $P < 0$ است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، این معادله

دارای دو ریشه مختلف‌العلامت، یعنی یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است.

دقت کنید که در حل معادله گویا، باید حواسمان باشد که جواب‌های نهایی ریشه‌های

مخرج نباشند. در این سؤال تنها ریشه مخرج $x = -2$ است ولی هیچ‌کدام از جواب‌های

نهایی (یعنی ریشه‌های معادله $6x^2 + 5x - 6 = 0$) برابر -2 نیستند، پس هر دو جواب

به‌دست‌آمده قابل قبول‌اند.

مشاوره کلید طلایی حل معادلات گویا، استفاده از اتحادها، تجزیه، مخرج مشترک‌گیری

و طرفین وسطین کردن است.

۱۱- گزینه ۲

درس‌نامه فرمول تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه، به شکل زیر است:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

کام ۱) ابتدا با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ABE،

طول BE را به دست می‌آوریم:

$$AB^2 + BE^2 = AE^2 \Rightarrow \frac{2^2}{4} + BE^2 = \frac{(2\sqrt{5})^2}{4}$$

$$\Rightarrow BE^2 = 16 \Rightarrow BE = 4$$

فرض می‌کنیم $\hat{C}AD = \beta$ باشد، در این صورت داریم:

$$\tan \hat{C}AD = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{3}$$

$$\tan \hat{B}AE = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{4}{2} = 2$$

کام ۲) حالا با استفاده از فرمول درس‌نامه، داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \Rightarrow 2 = \frac{\tan \alpha + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \tan \alpha}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{2}{3} \tan \alpha = \tan \alpha + \frac{1}{3} \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} = \tan \alpha + \frac{2}{3} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 1$$

کام ۳) با توجه به شکل α حاده است، پس $\alpha = \frac{\pi}{4}$ و در نتیجه $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌شود.

۱۲- گزینه ۳

درس‌نامه ۱) در توابع مثلثاتی به شکل $y = a + b \sin(cx + d)$ یا

$y = a + b \cos(cx + d)$ داریم:

$$\max = a + |b| \quad \text{الف)}$$

$$\min = a - |b| \quad \text{ب)}$$



گام ۱ به جای $\frac{1}{4}$ قرار می‌دهیم $\sin \frac{\pi}{6}$ و معادله مثلثاتی به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{4} - 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \frac{3\pi}{4} - 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

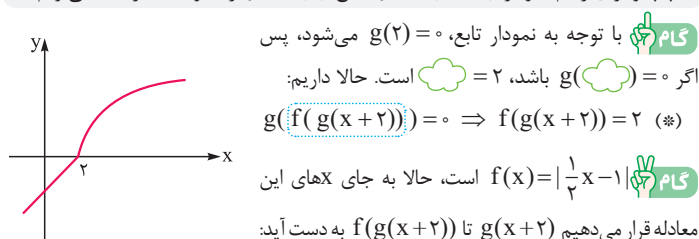
$$\Rightarrow \begin{cases} -2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \\ -2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -k\pi + \frac{7\pi}{24} \\ x = -k\pi - \frac{\pi}{24} \end{cases} \xrightarrow{x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} \begin{cases} x = \frac{7\pi}{24} \\ x = -\frac{\pi}{24} \end{cases}$$

بنابراین جمع جواب‌های این معادله، برابر $\frac{6\pi}{24} = \frac{\pi}{4}$ است.

مشاوره کلید طلایی حل سؤالات معادله مثلثاتی، ساده کردن معادله است که برای این کار معمولاً باید اتحادهای مثلثاتی و روش ساده کردن نسبت‌های مثلثاتی را بلد باشید.

۱۴- گزینه ۲

درس‌نامه اگر $k > 0$ باشد، برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ تابع $f(x)$ را k واحد به چپ و برای رسم نمودار $y = f(x-k)$ تابع $f(x)$ را k واحد به راست می‌بریم.

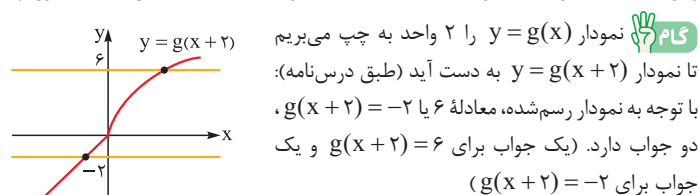


$$f(x) = |\frac{1}{4}x - 1| \xrightarrow{x=g(x+2)} f(g(x+2)) = |\frac{1}{4}g(x+2) - 1|$$

حالا با جای‌گذاری تساوی بالا در (*) داریم:

$$|\frac{1}{4}g(x+2) - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}g(x+2) - 1 = 2 \Rightarrow g(x+2) = 12 \\ \frac{1}{4}g(x+2) - 1 = -2 \Rightarrow g(x+2) = -4 \end{cases}$$

پس باید تعداد جواب‌های دو معادله $g(x+2) = 12$ و $g(x+2) = -4$ را به دست آوریم.



۱۵- گزینه ۱

استراتژی کافی است معادله خط $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ را بنویسید و از هم‌ارزی پرتوان استفاده کنید.

درس‌نامه ۱ معادله خط با طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q به صورت زیر است:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

۲ هم‌ارزی پرتوان: برای محاسبه حد در بی‌نهایت یک تابع کسری (مثلاً $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g}$)، کافی

است در صورت و مخرج، فقط جمله با بزرگ‌ترین توان x را نگه دارید و بقیه جملات را حذف

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{\Delta x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\Delta x} = \frac{4}{\Delta}$$

کنید. برای مثال:

حالا طبق قسمت (ث) درس‌نامه، مقدار $\cos(cx - \frac{\pi}{3})$ باید به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ برابر ± 1 شود. با توجه به (I)، یک بار به جای C قرار می‌دهیم $+1$ و بار دیگر به جای C قرار می‌دهیم -1 تا ببینیم کدام درست است:

$$\cos(cx - \frac{\pi}{3}) = \begin{cases} \xrightarrow{C=1} \cos(x - \frac{\pi}{3}) \\ \xrightarrow{C=-1} \cos(-x - \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \cos(0) = 1 \quad \checkmark \\ \cos(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \quad \times \end{cases}$$

بنابراین $C = 1$ قابل قبول است و جواب برابر $b(c-a) = 2(1-(-1)) = 4$ می‌شود.

روش نمودار $y = -1 + 2\cos(cx - \frac{\pi}{3})$ در $x = 0$ صعودی است، پس مشتق آن به ازای $x = 0$ باید مثبت شود:

$$y' = -2c \sin(cx - \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{x=0} -2c \sin(-\frac{\pi}{3}) > 0$$

$$\Rightarrow -2c \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) > 0 \Rightarrow \sqrt{3}c > 0 \Rightarrow c > 0$$

C باید مثبت باشد، پس $C = 1$ قابل قبول است. ادامه حل هم مثل روش اول است.

۱۳- گزینه ۴

استراتژی اول به جای $\cos(\frac{17\pi}{8} + x)$ بنویسید $\cos(\frac{\pi}{8} + x)$. بعد $\cos(\frac{\pi}{8} + x)$ را تبدیل به سینوس کنید، در آخر با استفاده از روابط دوآلفایی، معادله را ساده کنید تا جواب به سادگی به دست آید.

درس‌نامه ۱ برای ساده کردن زاویه نسبت‌های مثلثاتی می‌توانیم هر مضرب زوج دلخواهی از π را اضافه یا کم کنیم.

۲ برای تبدیل کسینوس به سینوس از این رابطه استفاده می‌کنیم: $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

۴ فرم کلی جواب‌های معادلات مثلثاتی را در جدول زیر ببینید:

$\sin A = \sin B \Rightarrow \begin{cases} A = 2k\pi + B \\ A = 2k\pi + (\pi - B) \end{cases}$
$\cos A = \cos B \Rightarrow A = 2k\pi \pm B$
$\tan A = \tan B \Rightarrow A = k\pi + B$

گام ۱ با کمک مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\cos(\frac{17\pi}{8} + x) = \cos(\frac{16\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + x) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{8} + x) = \cos(\frac{\pi}{8} + x)$$

مضرب زوج π

حالا با استفاده از مورد (۲) درس‌نامه، کسینوس را به سینوس تبدیل می‌کنیم:

$$\cos(\frac{\pi}{8} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{8} + x)) = \sin(\frac{3\pi}{8} - x)$$

گام ۲ در معادله اصلی، به جای $\cos(\frac{17\pi}{8} + x)$ ، قرار می‌دهیم $\sin(\frac{3\pi}{8} - x)$:

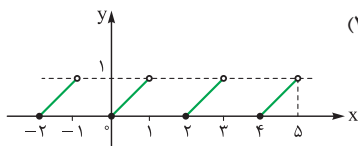
$$\sin(\frac{3\pi}{8} - x) \cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \cos^2(\frac{\pi}{8}) \quad (*)$$

با توجه به مورد (۳) درس‌نامه، داریم:

$$\sin(\frac{3\pi}{8} - x) \cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \frac{1}{2} \sin(2(\frac{3\pi}{8} - x)) = \frac{1}{2} \sin(\frac{3\pi}{4} - 2x)$$

از طرفی $\cos^2(\frac{\pi}{8}) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ است، بنابراین معادله (*) به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{1}{2} \sin(\frac{3\pi}{4} - 2x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(\frac{3\pi}{4} - 2x) = \frac{1}{2}$$



نمودار ضابطه به دست آمده (با توجه به مورد (۲))

درس نامه) به صورت مقابل می شود:

گام ۱ با توجه به نمودار رسم شده، برای این که f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید مقدار آن در اعداد فرد، از جمله در $x=1$ ، برابر ۱ شود. $[1] = 1$ فرد است، پس سراغ ضابطه پایینی می رویم:

$$f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = -x + [x-a] \Rightarrow -1 + [1-a] = 1 \Rightarrow [1-a] = 2$$

$$\xrightarrow{\text{درس نامه (ب)}} 2 \leq 1-a < 3 \xrightarrow{-1} 1 \leq -a < 2 \xrightarrow{\times(-1)} -2 < a \leq -1$$

اما با توجه به شرط $a < -1$ ، این محدوده به شکل $-2 < a < -1$ می شود.

گام ۲ به علاوه، یک شرط دیگر هم داریم. برای این که f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید حد چپ آن در اعداد زوج، از جمله در $x=2$ برابر صفر شود. $[2] = 1$ فرد است، پس دوباره سراغ ضابطه پایینی می رویم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -x + [x-a] \Rightarrow -2 + [2-a] = 0 \Rightarrow [2-a] = 2$$

$$\xrightarrow{\text{مورد (ب-۱) درس نامه}} 2 \leq 2-a < 3 \xrightarrow{-2} 0 \leq -a < 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 < a \leq 0$$

گام ۳ از بازه های (I) و (II) اشتراک می گیریم:

$$(I) \cap (II) = \emptyset$$

اشتراک دو بازه به دست آمده نهی است، پس به ازای هیچ مقدار a تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته نمی شود.

مشاوره پیشنهاد می کنیم حتماً به قواعد قدر مطلق و تابع جزء صحیح (همون پرکانت) مسلط باشید، چون جدیداً بسیاری از سؤالات حد و پیوستگی، با این دو مبحث ترکیب می شوند.

۱۷- گزینه ۲

درس نامه ۱ نقاط بحرانی، نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه تابع هستند که مشتق در آن ها وجود ندارد و یا وجود دارد و مقدار آن برابر صفر است؛ به عبارت دیگر برای پیدا کردن نقاط بحرانی یک تابع، باید به دنبال دو دسته از نقاط باشیم؛ دسته اول نقاط مشتق ناپذیر، دسته دوم، نقاط مشتق پذیری که مقدار مشتق آن ها صفر است.

۲ برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع کسری $y = \frac{f}{g}$ ، به صورت زیر عمل می کنیم:

(الف) اول از y مشتق می گیریم؛

(ب) بعد ریشه های صورت y' را به دست می آوریم؛ (خوب الان احتمالاً می پرسید چرا ریشه های مخرج y' رو به دست نمی اریم؟ جواب اینه که ریشه های مخرج y' ، ریشه های مخرج y هم هستند، پس توی دامنه تابع قرار ندارند.)

(پ) حالا ریشه های صورت y' که عضو دامنه تابع باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

۳ برای پیدا کردن نقاط بحرانی یک تابع چندضابطه ای، باید حواسمان به مشتق پذیری تابع در نقاط مرزی باشد. (نقاط مرزی در تابع چندضابطه ای، نقاطی هستند که ضابطه تابع در آن ها عوض می شود.)

۴ مشتق تابع کسری $\frac{f}{g}$ به صورت $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ است.

گام ۱ قدر مطلق را با بازه بندی از بین می بریم و تابع f را به صورت چندضابطه ای می نویسیم:

$$f(x) = \frac{x}{1-x|x|} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x(x)} = \frac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x(-x)} = \frac{x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases}$$

گام ۲ از f مشتق می گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1 \times (1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} & x \geq 0 \\ \frac{1 \times (1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & x \geq 0 \\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

۳ برای به دست آوردن ضابطه وارون تابع f به ترتیب زیر عمل می کنیم:

(الف) ابتدا به جای $f(x)$ قرار می دهیم y .

(ب) حالا جای x ها و y ها را عوض می کنیم.

(پ) بعد y را تنها می کنیم و به جای آن می نویسیم $f^{-1}(x)$.

۴ اگر وارون یک تابع را وارون کنیم، خود تابع به دست می آید، یعنی: $(f^{-1})^{-1} = f$

گام ۱ معادله خط f^{-1} را می نویسیم. طول از مبدأ این خط، m و عرض از مبدأ آن، π است، پس طبق مورد (۱) درس نامه داریم:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{\pi} = 1 \Rightarrow \frac{y}{\pi} = -\frac{x}{m} + 1 \xrightarrow{\times \pi} y = -\frac{\pi}{m}x + \pi$$

بنابراین $f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi$ می شود.

گام ۲ حالا وارون f^{-1} را به دست می آوریم تا f حاصل شود (مورد (۳) و (۴) درس نامه):

$$f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi \Rightarrow y = -\frac{\pi}{m}x + \pi \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض می کنیم}} x = -\frac{\pi}{m}y + \pi$$

y را تنها می کنیم:

$$\frac{\pi}{m}y = -x + \pi \xrightarrow{\times \frac{m}{\pi}} y = -\frac{m}{\pi}x + m \Rightarrow f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$$

گام ۳ به جای f و f^{-1} ، ضابطه های آن ها را قرار می دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \pi$$

از هم ارزی پرتوان استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x} = \pi \Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{m}}{-\frac{m}{\pi}} = \pi \Rightarrow \frac{\pi^2}{m^2} = \pi \Rightarrow m^2 = \pi \Rightarrow m = \pm \sqrt{\pi}$$

با توجه به نمودار، m سمت چپ محور y ها است، پس m منفی و در نتیجه $m = -\sqrt{\pi}$ می شود.

۱۶- گزینه ۱

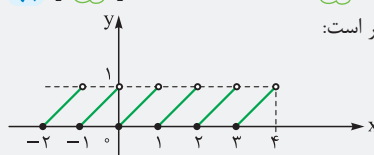
استراتژی ۱ اول قدر مطلق ها را از بین ببرید، بعد ضابطه بالایی را رسم کنید که با توجه به نمودار آن، جواب حاصل می شود.

درس نامه ۱ بعضی از قوانین جزء صحیح را در زیر ببینید:

(الف) $0 \leq \{x\} < 1$

(ب) $\{x\} = a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a \leq \{x\} < a+1$

۲ نمودار تابع $y = x - [x]$ به شکل زیر است:



۳ برای این که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار آن در $x=a$ با هم برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

۴ تابع f وقتی در $\mathbb{R}$ پیوسته است که در همه نقاط پیوسته باشد.

گام ۱ $x - [x]$ مثبت است، زیرا طبق مورد (۱ - الف) درس نامه، $0 \leq x - [x] < 1$ است، پس $|x - [x]| = x - [x]$ می شود.

گام ۲ حالا به سراغ ضابطه پایینی می رویم. اول یک a کم و اضافه می کنیم:

$$x - [x - a] = x - a - [x - a] + a$$

دوباره، طبق مورد (۱ - الف) درس نامه، $0 \leq (x - a) - [x - a] < 1$ است، اما $a < -1$ است، پس $x - a - [x - a] + a < 0$ می شود که عبارتی منفی است، بنابراین:

$$\overbrace{x - a - [x - a] + a}^{\text{مثبت}} = -x + [x - a]$$

گام ۳ حالا ضابطه تابع f را بدون قدر مطلق می نویسیم:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - [x] & \text{زوج } [x] \\ -x + [x - a] & \text{فرد } [x] \end{cases}$$



گام ۱ اختلاف مشتق چپ و راست f در $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{6}$ است:

$$f'_+(\frac{3}{4}) - f'_-(\frac{3}{4}) = 2\sqrt{6} \Rightarrow 2\sqrt{3a} - (-2\sqrt{3a}) = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6} \xrightarrow{\text{توان } 2} 16 \times 3a = 4 \times 6 \Rightarrow 48a = 24 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$



۱۹- گزینه؟

شفاف سازی نمودار تابع $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + (2 - m)x + 5$ محور x ها را در α و β

قطع می کند؛ یعنی α و β ریشه های معادله درجه دوم $(m^2 - 1)x^2 + (2 - m)x + 5 = 0$ هستند.

درس نامه ۱ اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta > 0$ باشند، داریم:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{ضرب ریشه ها} \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{جمع ریشه ها}$$

۲ برای به دست آوردن حد بی نهایت یک تابع، از جدول زیر کمک می گیریم:

$\frac{\text{عدد نا صفر مثبت}}{0^+} = +\infty$	$\frac{\text{عدد نا صفر مثبت}}{0^-} = -\infty$
$\frac{\text{عدد نا صفر منفی}}{0^+} = -\infty$	$\frac{\text{عدد نا صفر منفی}}{0^-} = +\infty$

گام ۱ با توجه به مورد (۱) درس نامه، مجموع α و β برابر است با:

$$(m^2 - 1)x^2 + (2 - m)x + 5 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{2 - m}{m^2 - 1} = \frac{m - 2}{m^2 - 1}$$

گام ۲ می خواهیم مجموع α و β ، یعنی $\frac{m - 2}{m^2 - 1}$ بیشترین مقدار باشد، ولی:

$$\lim_{m \rightarrow 1^-} \frac{m - 2}{m^2 - 1} = \frac{1 - 2}{1 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

بنابراین عبارت $\frac{m - 2}{m^2 - 1}$ بیشترین مقدار ندارد و سؤال غلط است!

مشاوره متأسفانه جدیداً در کنکور، سؤالات غلط زیاد دیده می شود! به همین خاطر پیشنهاد می کنیم اگر احساس کردید جواب در گزینه ها نیست، وقتتان را تلف نکنید؛ سؤال را رها کنید.



۲۰- گزینه ۲

استراتژی چیزی که سؤال می گوید معادل این است که ۵ نفر a, b, c, d و e در یک

ردیف بنشینند به طوری که دو نفر خاص کنار هم دیگر باشند. آن دو نفر را a و b در نظر می گیریم و افراد را به این صورت بسته بندی می کنیم:

a, b, c, d, e

در آخر جایگشت ۴ بسته را در جایگشت افراد درون بسته a, b ضرب می کنیم.

درس نامه ۱ n نفر به $n!$ حالت می توانند روی n صندلی کنار هم بنشینند.

۲ بعضی وقت ها در محاسبه تعداد جایگشت ها، کنار هم بودن چند شیء خاص برایمان مهم است. در چنین حالتی از روش «بسته بندی» استفاده می کنیم. مثلاً فرض کنید می خواهیم بینیم به چند طریق می شود ۶ نفر a, b, c, d, e و f روی ۶ صندلی بنشینند به طوری که a, b و c کنار هم باشند. برای پیدا کردن جواب، کارهای زیر را انجام می دهیم:

الف افراد را به شکل a, b, c, d, e, f بسته بندی می کنیم.

ب حالا می گوئیم ۴ بسته داریم که ۴! جایگشت دارند. اما باید حواسمان باشد که a, b و c هم در بسته خودشان ۳! جایگشت دارند؛ پس جواب می شود: $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

گام ۱ طبق استراتژی فرض می کنیم قرار است ۵ نفر a, b, c, d و e در یک ردیف

بنشینند به طوری که a و b کنار هم دیگر باشند؛ پس طبق درس نامه این ۵ نفر را به صورت مقابل بسته بندی می کنیم:

a, b, c, d, e

گام ۱ ریشه های صورت هر کدام از دو ضابطه را به دست می آوریم:

ریشه ندارد. $1 + x^2 = 0$ صورت ضابطه بالایی

صورت ضابطه پایینی: $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

غ غ ق چون در این ضابطه $x < 0$ است. $x = 1$
 $x = -1$ ✓



گام ۲ حالا باید مشتق پذیری f در $x = 0$ (نقطه مرزی) را هم بررسی کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 + x^2} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow f \text{ در } x = 0 \text{ پیوسته است.}$$

$$f(0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(\frac{0}{1}) &= \frac{1+0}{(1-0)^2} = 1 \\ f'_-(\frac{0}{1}) &= \frac{1-0}{(1+0)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مشتق چپ و راست } f \text{ در } x = 0 \text{ برابرند.}$$

پس f در $x = 0$ مشتق پذیر است.

بنابراین تنها نقطه بحرانی تابع f ، $x = -1$ است.



۱۸- گزینه ۳

شفاف سازی منظور از «شیب نیم خط های مماس چپ و راست f در $x = \frac{3}{4}$ »، همان

مشتق های چپ و راست f در $x = \frac{3}{4}$ است.

استراتژی اول قدر مطلق را در سمت راست و چپ $x = \frac{3}{4}$ از بین ببرید، بعد با استفاده از

مشتق های عامل صفرشونده، اختلاف مشتق راست و چپ f در $x = \frac{3}{4}$ را برابر $2\sqrt{6}$ قرار دهید.

درس نامه ۱ مشتق عامل صفرشونده: اگر مشتق تابع $y = f \cdot g$ در $x = a$ را

بخواهیم و مقدار f در $x = a$ برابر صفر باشد، کافی است فقط از f مشتق بگیریم و بعد به جای x قرار دهیم a . برای مثال اگر مشتق $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x + 3}$ در $x = 1$ را بخواهیم، داریم:

$$f(x) = \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{مشتق } x^2 - 1} \cdot \sqrt{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{2x}_{\text{مشتق } x^2 - 1} \times \sqrt{x + 3}$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = 2 \times \sqrt{4} = 4$$

۲ مشتق $\sqrt{u}$ به صورت $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ است.

گام ۱ ضابطه f در $x = \frac{3}{4}$ به صورت زیر است: (در $x = \frac{3}{4}$ مقدار $4x - 3$ مثبت

است، پس $|4x - 3| = 4x - 3$ می شود.)

حالا مشتق راست f در $x = \frac{3}{4}$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = (4x - 3)\sqrt{ax} \Rightarrow f'(x) = 4\sqrt{ax} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} f'_+(\frac{3}{4}) = 4\sqrt{\frac{3}{4}a} = 2\sqrt{3a}$$

گام ۲ ضابطه f در $x = \frac{3}{4}$ به صورت زیر است: (در $x = \frac{3}{4}$ مقدار $4x - 3$ منفی

است، پس $|4x - 3| = -4x + 3$ می شود.)

حالا مشتق چپ f در $x = \frac{3}{4}$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = (-4x + 3)\sqrt{ax} \Rightarrow f'(x) = -4\sqrt{ax}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{4}} f'_-(\frac{3}{4}) = -4\sqrt{\frac{3}{4}a} = -2\sqrt{3a}$$



از طرفی سؤال می‌گوید $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ است. حالا با جای گذاری این دو مقدار به همراه $P(A \cap B) = 0$ در تساوی (*)، خواسته مسئله را به دست می‌آوریم:

$$P(B' | A') = \frac{1 - [\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 0]}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1 - \frac{5}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{5} = 1.4$$

۲۳- گزینه ۳

درس نامه اگر میانگین n داده $X_1, X_2, \dots, X_n$ و X_n برابر $\bar{X}$ باشد، در این صورت واریانس (σ^2) و ضریب تغییرات (CV) از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

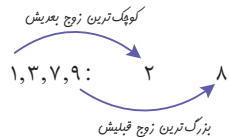
گام ۱ در مرحله اول باید از پنج عدد فرد $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، چهار عدد انتخاب کنیم و به عنوان اعداد دسته اول انتخابشان کنیم. اگر ۵ جزء اعداد انتخابی باشد، هیچ جوره نمی‌توانیم به اعداد غیر تکراری برسیم. مثلاً اگر اعداد انتخابی ۱, ۳, ۵, ۷ باشند، طبق صورت سؤال به جای ۱ باید ۲ و در نتیجه به جای ۳ هم باید ۴ بگذاریم:

$$1, 3, 5, 7$$

حالا باید به جای ۵ و ۷ بزرگ‌ترین عدد زوج قبل از خودشان، یعنی ۴ و ۶ را جای گذاری کنیم که عدد تکراری ۴ به وجود می‌آید. هر ۳ عدد دیگر که ۵ جزء شوند باشه، رو انتخاب کنیم، باز هم همین مشکل رو داریم؛ پس حق نداریم ۵ رو انتخاب کنیم.

گام ۲ حالا که فهمیدیم ۵ نباید جزء اعداد انتخابی باشد، می‌توانیم بگوییم اعداد دسته اول این‌ها هستند: ۱, ۳, ۷, ۹

گام ۳ حالا اعداد دسته دوم را می‌سازیم. به جای ۱ و ۹ مجبوریم ۲ و ۸ را بنویسیم؛ ببینید:



پس به جای ۳، عدد ۴ و به جای ۷ هم عدد ۶ را جای گذاری می‌کنیم تا به اعداد دسته دوم برسیم: ۲, ۴, ۶, ۸

گام ۴ ضریب تغییرات دسته اول را در سه مرحله به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}_1 = \frac{1+3+7+9}{4} = 5 \quad \text{محاسبه } \bar{x}_1$$

$$\sigma_1^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{4} = \frac{40}{4} = 10 \quad \text{محاسبه } \sigma_1^2$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{10}$$

$$(CV)_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{\sqrt{10}}{5} \quad \text{محاسبه } (CV)_1$$

گام ۵ حالا نوبت محاسبه ضریب تغییرات دسته دوم است:

$$\bar{x}_2 = \frac{2+4+6+8}{4} = 5 \quad \text{محاسبه } \bar{x}_2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{5} \quad \text{محاسبه } \sigma_2^2$$

نکته اگر n داده، یک دنباله حسابی با قدرنسبت d سازند، واریانشان را می‌توانیم مستقیماً از رابطه مقابل حساب کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} d^2$$

۴ عدد ۲, ۴, ۶, ۸ در دسته دوم یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ می‌سازند، پس طبق نکته بالا می‌توانستیم واریانشان را مستقیماً حساب کنیم:

$$\sigma_2^2 = \frac{4^2 - 1}{12} \times 2^2 = \frac{15}{12} \times 4 = 5$$

گام ۶ کل بسته‌ها ۴! و دو نفر a و b در بسته خودشان ۲! جایگشت دارند، پس جواب می‌شود: $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$

تله اگر ۲ جایگشت a و b در بسته خودشان را در نظر نمی‌گرفتیم به گزینه اشتباه می‌رسیدیم.

۲۱- گزینه ۲

درس نامه معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرطی دو ریشه حقیقی و متمایز دارد که دلتایش بزرگ‌تر از صفر باشد؛ یعنی: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

گام ۱ طبق درس نامه، معادله $\frac{1}{a}x^2 - \frac{m}{b}x + \frac{n}{c} = 0$ به شرطی دو ریشه حقیقی و متمایز دارد که دلتایش بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(1)(n) > 0 \Rightarrow m^2 > 4n \quad (*)$$

گام ۲ می‌دانیم در پرتاب تاس، یکی از اعداد ۱ تا ۶ رو می‌شود، پس می‌توانیم در نامساوی (*) به جای n ، اعداد ۱ تا ۶ را جای گذاری کنیم و ببینیم در هر حالت برای m چند مقدار قابل قبول پیدا می‌شود:

$$n = 1 \xrightarrow{(*)} m^2 > 4 \Rightarrow m = 3, 4, 5, 6 \quad \text{حالت: } 4$$

$$n = 2 \xrightarrow{(*)} m^2 > 8 \Rightarrow m = 3, 4, 5, 6 \quad \text{حالت: } 4$$

$$n = 3 \xrightarrow{(*)} m^2 > 12 \Rightarrow m = 4, 5, 6 \quad \text{حالت: } 3$$

$$n = 4 \xrightarrow{(*)} m^2 > 16 \Rightarrow m = 5, 6 \quad \text{حالت: } 2$$

$$n = 5 \xrightarrow{(*)} m^2 > 20 \Rightarrow m = 5, 6 \quad \text{حالت: } 2$$

$$n = 6 \xrightarrow{(*)} m^2 > 24 \Rightarrow m = 5, 6 \quad \text{حالت: } 2$$

پس در « $17 = 4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2$ » حالت، خواسته مسئله برآورده می‌شود.

گام ۳ در پرتاب دو تاس کلاً ۳۶ حالت وجود دارد. همان‌طور که در گام دوم دیدید در ۱۷ حالت از این ۳۶ حالت، خواسته مسئله برآورده می‌شود، پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{17}{36}$ است که متأسفانه در گزینه‌ها نیست!

۲۲- گزینه ۱

نکته استراتژی اول $P(B' | A')$ را به کمک موردهای (۲)، (۳) و (۴) درس‌نامه بازش می‌کنیم، تا جایی که فقط $P(A)$ و $P(B)$ ببینیم. بعد با جای گذاری $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ در تساوی به دست‌آمده جواب مسئله را پیدا می‌کنیم.

درس نامه ۱ اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت:

۲ اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای باشند، احتمال رخ دادن پیشامد A به شرط رخ دادن پیشامد B را به صورت $P(A | B)$ نمایش می‌دهیم. $P(A | B)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$P(A \cup B) \text{ و } P(A') \text{ به صورت زیر باز می‌شوند:}$$

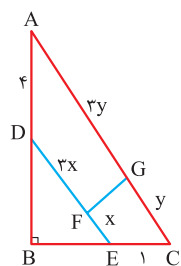
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ و } P(A') = 1 - P(A)$$

گام ۱ طبق استراتژی، اول $P(B' | A')$ را به کمک موردهای (۲)، (۳) و (۴) درس‌نامه بازش می‌کنیم؛ تا جایی که فقط $P(A)$ و $P(B)$ ببینیم:

$$P(B' | A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P((A \cup B)')}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(A)} \quad (*)$$

گام ۲ به گفته سؤال A و B دو پیشامد ناسازگارند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه $P(A \cap B) = 0$ می‌شود.



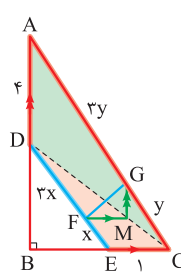
گام ۳ (انتقال اطلاعات مسئله روی شکل) طبق مورد (۳) درس نامه
از تناسب $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = \frac{4}{1}$ نتیجه می گیریم که:

$$\begin{cases} DE = 4x, EF = x \\ AC = 4y, CG = y \end{cases}$$

حالا طول پاره‌های AG و DF را هم برحسب x و y به دست

$$\begin{cases} AG = AC - CG = 4y - y \Rightarrow AG = 3y \\ DF = DE - EF = 4x - x \Rightarrow DF = 3x \end{cases}$$

چیزهایی را که به دست آوردیم، روی شکل بالا می‌نویسیم:



گام ۴ (افزودن پاره‌های مناسب به شکل و تحلیل شکل جدید)

در مورد پاره‌های AC، AD، EC و DE اطلاعات داریم؛
بباید این پاره‌ها را ضخیم‌شان کنیم. الان بهترین کار اینست
که دو مثلث بسازیم که پاره‌های ضخیم ضمیمه‌شان باشند،
پس با DC را به شکل اضافه می‌کنیم یا AE. ما این‌جا DC را
اضافه می‌کنیم. حالا از F خطی موازی با EC (یا BC) می‌کشیم
تا DC را در M قطع کند. الان طبق قضیه تالس در مثلث DEC

$$\frac{DM}{MC} = \frac{DF}{FE} \Rightarrow \frac{DM}{MC} = \frac{3x}{x} = 3 \quad (1)$$

حالا خوب به مثلث ADC نگاه کنید. با توجه به تناسب (۱) و همین‌طور طول قطعات AG

و CG می‌توانیم بگوییم در این مثلث رابطه $\frac{DM}{MC} = \frac{AG}{GC} = 3$ برقرار است؛ بنابراین طبق

عکس قضیه تالس (مورد (۲) درس‌نامه) اگر از M به G وصل کنیم، حتماً MG موازی AD (یا AB) خواهد بود. این پاره‌ها را هم به شکل اضافه می‌کنیم.

گام ۵ (تشخیص نوع مثلث FMG) در گام دوم دیدیم $MG \parallel AB$ و همین‌طور

$MF \parallel BC$ شد؛ این یعنی زاویه بین دو پاره‌خط MG و MF با زاویه بین دو پاره‌خط AB و BC برابر می‌شود؛ بنابراین $\hat{M} = 90^\circ$ و در نتیجه مثلث MFG قائم‌الزاویه است.

گام ۶ (محاسبه طول پاره‌های MF و MG) حالا به کمک تالس جزء به کل در مثلث DEC، طول MF را حساب می‌کنیم.

$$\frac{DF}{DE} = \frac{MF}{EC} \Rightarrow \frac{3x}{4x} = \frac{MF}{4y} \Rightarrow MF = \frac{3}{4}y$$

طول MG هم به کمک جزء به کل در مثلث ADC پیدا می‌شود:

$$\frac{CG}{CA} = \frac{MG}{AD} \Rightarrow \frac{y}{4y} = \frac{MG}{4} \Rightarrow MG = 1$$

گام ۷ (محاسبه خواسته سؤال) حالا که طول MF و MG را داریم، می‌توانیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث MFG طول FG را به دست بیاوریم:

$$FG^2 = MF^2 + MG^2 \Rightarrow FG^2 = \left(\frac{3}{4}y\right)^2 + 1^2 = \frac{9}{16}y^2 + 1 = \frac{25}{16}y^2$$

$$\Rightarrow FG = \frac{5}{4}y = 1/25$$

مشاوره این سخت‌ترین سؤال هندسه تاریخ کنکور ایران است، پس اگر نتوانستید حلش کنید اصلاً ناراحت نباشید؛ کاملاً طبیعی است.

گزینه ۱ - ۲۶

روش گام ۱ (محاسبه شعاع دایره)،

فرض می‌کنیم شعاع دایره r باشد؛ در این صورت طول ضلع مربع BEDF برابر می‌شود با ۲r. به گفته سؤال $AB = 10$ و $BC = 5$ است؛ پس می‌توانیم بگوییم $2r = 10 - AF$ و $2r = 5 - EC$. این دو مورد را روی شکل می‌نویسیم.

$$(CV)_r = \frac{\sigma_r}{\bar{x}_r} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

محاسبه $(CV)_r$:

بنابراین نسبت ضریب تغییرات دسته اول به دسته دوم برابر می‌شود با:

$$\frac{(CV)_1}{(CV)_r} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

گزینه ۴ - ۲۴

شفاف‌سازی کیسه دوم همه گوی‌های قرمز است، پس «یک گوی خارج می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است با کدام احتمال همه گوی‌های آن کیسه قرمز است؟»، یعنی احتمال این که گوی قرمز خارج‌شده از کیسه دوم باشد، چه قدر است؟

درس‌نامه قانون بیز: در «فرم شرطی احتمال کل» اول احتمال کل را به کمک نمودار درختی حساب کنید، بعد شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنید.

گام ۱ طبق شفاف‌سازی باید احتمال این که گوی قرمز خارج‌شده از کیسه دوم باشد، یعنی

(قرمز بودن گوی خارج‌شده | کیسه دوم) P را حساب کنیم؛ پس با فرم شرطی احتمال کل طرف هستیم. اول باید احتمال قرمز بودن گوی خارج‌شده را به دست بیاوریم. سه کیسه داریم پس احتمال انتخاب هر کدامشان $\frac{1}{3}$ است، بنابراین تا این‌جا نمودار درختی این شکلی می‌شود:

گام ۲ حالا باید در هر یک از دایره‌های توخالی بالا احتمال قرمز بودن یک مهره را بنویسیم.

در شاخه اول احتمال قرمز بودن یک مهره صفر است، چون کیسه اول اصلاً مهره قرمز ندارد (همشون سبز)؛ پس در شاخه اول صفر می‌گذاریم. به همین ترتیب در شاخه‌های دوم و سوم به ترتیب اعداد $\frac{2}{10} = \frac{2}{5}$ و $\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ را می‌نویسیم تا نمودار درختی به این صورت کامل بشود:

بنابراین احتمال قرمز بودن مهره خارج‌شده می‌شود:

$$P(\text{قرمز}) = \left(\frac{1}{3} \times 0\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

گام ۳ حالا طبق قانون بیز، شاخه مطلوب، یعنی شاخه کیسه دوم را به احتمال کل تقسیم می‌کنیم:

$$P(\text{قرمز بودن گوی خارج‌شده} | \text{کیسه دوم}) = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{6}$$

گزینه ۲ - ۲۵

درس‌نامه ۱ در شکل رسم‌شده اگر $DE \parallel BC$ باشد، طبق قضیه تالس می‌توانیم تناسب‌های زیر را بنویسیم:

$$\begin{aligned} \text{(جزء به جزء)} \quad \frac{AD}{DB} &= \frac{AE}{EC} \\ \text{(جزء به کل)} \quad \frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \end{aligned}$$

۲ عکس قضیه تالس هم برقرار است، یعنی از برقراری هر یک از تناسب‌های بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که DE با BC موازی است.

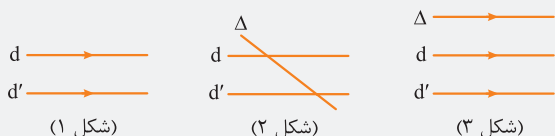
۳ از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a = ck$ و $b = dk$ است. مثلاً $\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow a = 3k, b = 5k$



۲۸ - گزینه ۴

درس نامه ۱ از دو خط موازی، دقیقاً یک صفحه می‌گذرد.

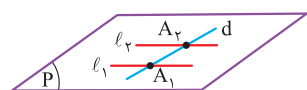
۲ دو خط موازی d و d' را در صفحه در نظر بگیرید. (شکل ۱)؛ اگر خطی مثل Δ یکی از دو خط موازی را قطع کند، حتماً دیگری را هم قطع می‌کند (شکل ۲) و اگر با یکی از آن‌ها موازی باشد با دیگری هم موازی است. (شکل ۳)



به گفته سؤال ℓ_1 و ℓ_2 با هم موازی‌اند، بیایید فرض کنیم d با ℓ_2 موازی باشد، این‌جوری طبق قسمت (۲) درس‌نامه، چون d با یکی از خطوط موازی ℓ_1 و ℓ_2 موازی شده ($d \parallel \ell_2$) یکی از ℓ_1 پس با دیگری (ℓ_1) هم موازی می‌شود؛ یعنی:

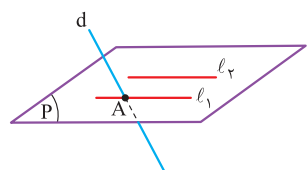
اما خود سؤال می‌گوید d و ℓ_1 متقاطع‌اند! پس امکان ندارد که d با ℓ_2 موازی شود، بنابراین d و ℓ_2 همیشه غیرموازی‌اند. همین‌جا معلوم می‌شود که (۴) درست است؛ اما اگر به دنبال توضیحات تکمیلی هستیم؛ خدمت شما می‌توانیم این‌طور هم استدلال کنیم که از دو خط موازی، دقیقاً یک صفحه می‌گذرد، در این‌جا ما صفحه‌ی گذرنده از ℓ_1 و ℓ_2 را P می‌نامیم. دو حالت پیش می‌آید:

(۱) خط d در صفحه P واقع باشد.



همان‌طور که در قسمت (۲) درس‌نامه گفتیم در صفحه، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند، پس در این حالت d با ℓ_2 متقاطع است.

(۲) خط d در صفحه P واقع نباشد.



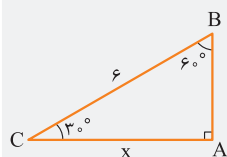
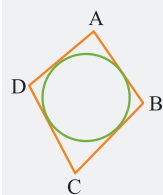
همان‌طور که در شکل می‌بینید، در این حالت اگر خط d بخواهد ℓ_1 را در A قطع کند، با ℓ_2 متناظر می‌شود. با کنار هم گذاشتن نتایج این دو حالت باز هم به این نتیجه می‌رسیم که d و ℓ_2 باید غیرموازی باشند.

مشاوره در سؤال‌های «هندسه فضایی» از رسم شکل غافل نشوید. خیلی وقت‌ها حتی اگر قضایای «هندسه فضایی» را هم بلد نباشید، رسم شکل مناسب، شما را به پاسخ می‌رساند.

۲۹ - گزینه ۴

درس نامه ۱ اگر یک چهارضلعی محیطی باشد (یعنی هر چهار ضلع آن بر یک دایره مماس باشند)، آن‌گاه مجموع اضلاع روبه‌روی آن، با هم برابر است، مثلاً برای چهارضلعی ABCD در شکل روبه‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$AD + BC = AB + CD$$



$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$$

۳ مساحت هر دوزنقه با قاعده‌های a و b و ارتفاع h برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$$

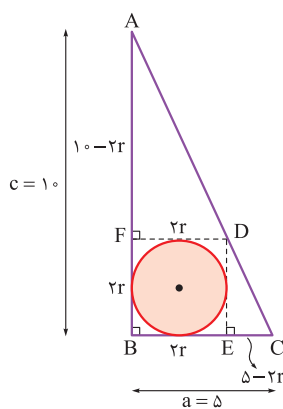
مجموع طول قاعده‌ها

حالا شکل را ببینید، در مثلث ABC ، $FD \parallel BC$ ، است، بنابراین طبق تالس جزء به کل داریم:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{FD}{BC} \Rightarrow \frac{10-2r}{10} = \frac{2r}{5}$$

$$\xrightarrow{\times 10} 10-2r = 4r$$

$$\Rightarrow 6r = 10 \Rightarrow r = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$



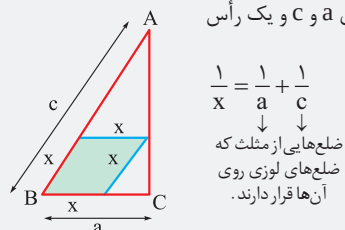
گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال):

می‌دانیم مساحت دایره‌ای به شعاع r می‌شود $S = \pi r^2$ ، پس در این‌جا:

$$r = \frac{5}{3} \Rightarrow S = \pi \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \pi$$

روشنی

نکته اگر مطابق شکل، یک لوزی به طول ضلع x درون مثلث ABC محاط شود به طوری که دو ضلع آن واقع بر اضلاع به طول‌های a و c و یک رأس آن روی ضلع دیگر مثلث باشد، آن‌گاه:



$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

ضلع‌هایی از مثلث که ضلع‌های لوزی روی آن‌ها قرار دارند.

حالا شکل این سؤال را ببینید؛ می‌دانیم که مربع نوعی لوزی است، حالا به مربع $BEDF$ دقت کنید. می‌شود گفت یک لوزی به طول ضلع $2r$ داریم که با شرایط نکته بالا هماهنگ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{2r} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{2r} = \frac{2+1}{10} \Rightarrow 6r = 10$$

$$\Rightarrow r = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \pi$$

۲۷ - گزینه ۲

درس نامه تعداد قطرهای یک k ضلعی برابر است با:

$$\frac{k(k-3)}{2}$$

گام ۱ (به دست آوردن n):

در درس‌نامه گفتیم تعداد قطرهای یک k ضلعی برابر است با $\frac{k(k-3)}{2}$ ، پس یک n ضلعی $A = \frac{n(n-3)}{2}$ قطر و یک $(n-1)$ ضلعی $B = \frac{(n-1)(n-4)}{2}$ تا قطر دارد. حالا سؤال گفته $A - B = 16$ ، یعنی:

$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-1)(n-4)}{2} = 16$$

$$\Rightarrow \frac{(n^2 - 3n) - (n^2 - 5n + 4)}{2} = 16 \Rightarrow \frac{2n - 4}{2} = 16$$

$$\Rightarrow n - 2 = 16 \Rightarrow n = 18$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال)

پس با یک ۱۸ضلعی طرف هستیم که « $\frac{18 \times (18-3)}{2} = 135$ » تا قطر دارد. با کم‌شدن دو ضلع، به یک $18-2=16$ ضلعی می‌رسیم که « $\frac{16 \times (16-3)}{2} = 104$ » تا قطر دارد، پس اختلاف تعداد قطرهای برابر است با $135 - 104 = 31$.

مشاوره پس از سال‌ها از «تعداد قطرهای n ضلعی» در کنکور سؤال آمده است؛ این یعنی طراح کنکور از هر چیزی که در کتاب درسی آمده است، سؤال طرح می‌کند؛ پس لطفاً هیچ چیز را از قلم نیندازید و همهٔ مباحث کتاب درسی را بخوانید.



گام ۳ (محاسبه زاویه EID بر حسب $\hat{A}$)

در مثلث ABC، BD و CE نیمسازهای داخلی هستند، پس طبق قسمت (۲) درس نامه، زاویه BIC برابر می شود با:

$$\hat{BIC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

نصف زاویه سوم مثلث

از طرفی زاویه های EID و BIC متقابل به رأس اند، پس:

$$\hat{EID} = \hat{BIC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \quad (**)$$

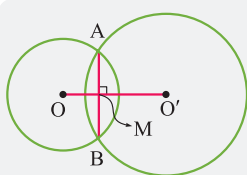
گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال)

در آخر تساوی (***) را در تساوی (*) جای گذاری می کنیم تا $\hat{A}$ به دست بیاید:

$$\hat{A} + \hat{EID} = 180^\circ \xrightarrow{(**)} \hat{A} + (90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

۳- گزینه ۲

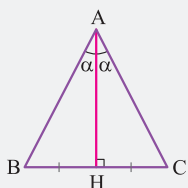


درس نامه ۱ دو دایره متقاطع با خطالمرکزین OO' و وتر مشترک AB را در شکل مقابل ببینید. در چنین وضعیتی همیشه خطالمرکزین (OO') عمودمنصف وتر مشترک (AB) است. این یعنی در شکل مقابل OO' $\perp$ AB و M وسط AB است.

۲ معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به این صورت نوشته می شود:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

۳ هر وقت می خواستید، محل برخورد یک منحنی مثل f را با محور X ها پیدا کنید، در معادله f، y را صفر بگذارید و معادله حاصل را حل کنید. برای پیدا کردن محل برخورد با محور Y ها هم باید X را صفر بگذارید.

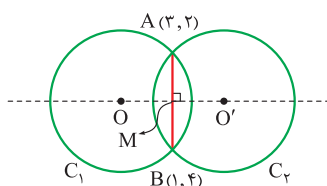


۴ اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیبشان قرینه معکوس هم است.

۵ در هر مثلث متساوی الساقین مثل ABC در شکل مقابل، ارتفاع وارد بر قاعده (ارتفاع AH) نیمساز و میانه هم هست، یعنی در شکل مقابل BH = HC است.

۶ معادله خطی که از نقطه $A(x_0, y_0)$ می گذرد و شیبش m است، به این صورت نوشته می شود: $y - y_0 = m(x - x_0)$

گام ۴ (رسم شکل فرضی و تحلیل آن) شکل فرضی مقابل را می کشیم.



طبق مورد (۱) درس نامه دو چیز می توانیم بگوییم؛ اول این که خطالمرکزین OO' بر وتر مشترک AB عمود و دوم این که M، وسط AB است.

گام ۵ (محاسبه شعاع دایره ها) به گفته

سؤال فاصله بین مراکز دو دایره (OO') در شکل مقابل، دو برابر فاصله بین نقاط تقاطع دایره ها (نقاط A و B) است، بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$OO' = 2AB = 2\sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{4+4} = 4\sqrt{2}$$

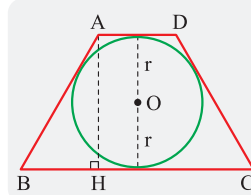
در ادامه خوب به مثلث متساوی الساقین رنگی نگاه کنید. طبق مورد (۵) درس نامه، در این

$$MO = MO' = \frac{OO'}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

مثلث ارتفاع AM، میانه هم هست؛ یعنی:

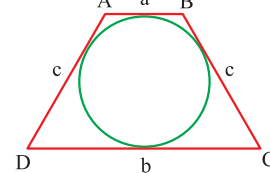
۴ همان طور که در شکل مقابل می بینید، اندازه ارتفاع

یک دوزنقه محیطی با اندازه قطر دایره محاطی اش برابر است؛ یعنی: $AH = 2r$



گام ۵ (بررسی شرط محیطی بودن دوزنقه متساوی الساقین)

طبق قسمت (۱) درس نامه، دوزنقه متساوی الساقین ABCD در شکل مقابل، به شرطی محیطی است که مجموع طول ضلع های مقابلش برابر باشند، یعنی:



$$AB + DC = AD + BC \Rightarrow a + b = c + c \Rightarrow a + b = 2c \quad (*)$$

گام ۶ (محاسبه a + b)

حالا خوب به شکل مقابل نگاه کنید. طبق مورد (۴)

درس نامه می توانیم بگوییم طول ارتفاع AH برابر می شود با طول قطر دایره محاطی، یعنی $AH = 4$.

در مثلث قائم الزاویه ADH زاویه 60° داریم و طول ساق AD را می خواهیم، پس طبق مورد (۲) درس نامه از نسبت های مثلثاتی کمک می گیریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

حالا که ارتفاع و مجموع طول قاعده های دوزنقه را داریم می توانیم مساحتش را به کمک مورد (۳) درس نامه، حساب کنیم:

$$a + b = 2\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

گام ۷ (محاسبه خواسته سؤال)

حالا که ارتفاع و مجموع طول قاعده های دوزنقه را داریم می توانیم مساحتش را به کمک مورد (۳) درس نامه، حساب کنیم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot AH \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{\sqrt{3}}\right)(4) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

مشاوره بارها گفته ایم که «دوزنقه متساوی الساقین محیطی» بسیار مورد علاقه طراح کنکور است. حتماً به طور ویژه روی آن وقت بگذارید و روابط آن را بلد باشید.

۳- گزینه ۳

درس نامه ۱ زاویه های مقابل به هم در چهارضلعی های

محاطی مکمل اند؛ این یعنی اگر چهارضلعی ABCD در شکل مقابل محاطی باشد، می توانیم بنویسیم:

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

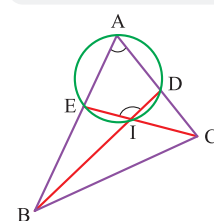
۲ زاویه منفرجه بین هر دو نیمساز داخلی در یک مثلث، برابر است با 90° به علاوه نصف زاویه سوم مثلث. مثلاً در شکل روبه رو، داریم:

$$\hat{BIC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

گام ۸ (اعمال شرط محاطی بودن چهارضلعی)

به گفته سؤال، چهارضلعی ADIE محاطی است، پس طبق قسمت (۱) درس نامه می توانیم بگوییم زاویه های مقابل به هم $\hat{A}$ و $\hat{EID}$ مکمل اند، یعنی:

$$\hat{A} + \hat{EID} = 180^\circ \quad (*)$$





اول به کمک مورد (۱) درس نامه، تصویر بردار $(2, -a, 3)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (1, 0, a)$ به دست می آوریم:

$$\vec{a}' = \frac{(2, -a, 3) \cdot (1, 0, a)}{(\sqrt{1^2 + 0^2 + a^2})^2} (1, 0, a) \Rightarrow \vec{a}' = \frac{2 + 3a}{a^2 + 1} (1, 0, a)$$

به گفته سؤال اندازه بردار $\vec{a}'$ برابر $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است، پس می توانیم بنویسیم:

$$\frac{2 + 3a}{a^2 + 1} \sqrt{1^2 + 0^2 + a^2} = \frac{5}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{توان}} \frac{(2 + 3a)^2}{(a^2 + 1)^2} (a^2 + 1) = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(2 + 3a)^2}{a^2 + 1} = \frac{25}{2} \Rightarrow 2(2 + 3a)^2 = 25(a^2 + 1)$$

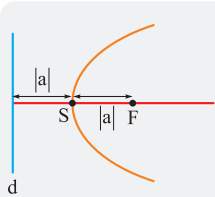
$$\Rightarrow 2(4 + 12a + 9a^2) = 25a^2 + 25 \Rightarrow 7a^2 - 24a + 17 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} a = 1, \frac{17}{7}$$

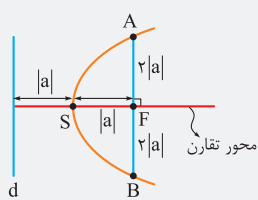
$$\text{بنابراین اختلاف مقادیر } a = \frac{17}{7} - 1 = \frac{10}{7}$$

بنابراین اختلاف مقادیر a می شود:

۳۳ - گزینه ۳



درس نامه ۱ همان طور که در شکل مقابل می بینید؛ فاصله رأس سهمی (S) از کانون (F) و خط هادی سهمی (d) یکسان است. این فاصله را معمولاً با $|a|$ نشان می دهیم.

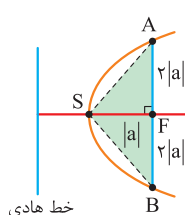


۲ مطابق شکل مقابل، اگر از کانون به محور تقارن سهمی یک خط عمود بکشیم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند، وترى به طول $AB = 4|a|$ درست می شود که به آن **وتر کانونی** می گوئیم.

۳ هر وقت معادله گسترده یک سهمی را داشتید و a را می خواستید از رابطه زیر استفاده کنید:

$$a = \frac{\text{ضرب متغیر درجه ۱}}{۴ \times \text{ضرب متغیر درجه ۲}}$$

(نشان دهنده منفی باشد)



گام ۱ (رسم شکل و تحلیل آن) شکل مسئله به صورت مقابل است:

طبق مورد (۲) درس نامه، AB وتر کانونی است، پس می توانیم طول پاره خط های AF و FB را بر حسب $|a|$ روی شکل بنویسیم.

گام ۲ (تحلیل خواسته سؤال) سؤال مساحت مثلث رنگی را می خواهد که برابر است با:

$$S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} SF \times AB = \frac{1}{2} (|a|)(4|a|) = 2|a|^2 \quad (*)$$

پس باید $|a|$ را حساب کنیم.

گام ۳ (محاسبه |a| و خواسته مسئله) طبق مورد (۳) درس نامه مقدار a در سهمی $y^2 - x - 4y + 2 = 0$ برابر می شود با:

$$a = -\frac{\text{ضرب متغیر درجه ۱}}{۴ \times \text{ضرب متغیر درجه ۲}} = -\frac{-1}{1 \times 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow |a| = \frac{1}{4}$$

حالا $|a| = \frac{1}{4}$ را در تساوی (*) جای گذاری می کنیم تا خواسته مسئله پیدا شود:

$$S_{\triangle ASB} = 2|a|^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

از طرفی M هم وسط AB است، پس:

$$MA = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

حالا که طول MA و MO را داریم می توانیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $\triangle AOM$ ، r را به دست بیاوریم:

$$r^2 = MA^2 + MO^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 10 \Rightarrow r = \sqrt{10}$$

گام ۱ (پیدا کردن مختصات پارامتری O) طبق شکل گام ۲، O روی خط المרכזین دو دایره قرار دارد؛ پس برای پیدا کردن مختصات پارامتری آن باید اول معادله OO' را بنویسیم. OO' بر AB عمود است بنابراین شیبش قرینه معکوس شیب خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - 4}{3 - 1} = -1 \xrightarrow{m_{OO'} = -\frac{1}{m_{AB}}} m_{OO'} = 1$$

از طرفی OO' از M که وسط AB قرار دارد هم می گذرد، پس مختصات نقطه M را هم به دست می آوریم:

$$M = \frac{A + B}{2} = \frac{(3, 2) + (1, 4)}{2} = \frac{(4, 6)}{2} = (2, 3)$$

حالا می توانیم بگوئیم OO' از نقطه $M(2, 3)$ می گذرد و شیبش ۱ است؛ پس طبق مورد (۶) درس نامه معادله اش به این صورت نوشته می شود:

$$y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

O روی خط $y = x + 1$ قرار دارد، بنابراین مختصات پارامتری آن به صورت $O(\alpha, \alpha + 1)$ می شود.

گام ۲ (پیدا کردن مرکز دایره ها) فاصله نقطه $O(\alpha, \alpha + 1)$ از $A(3, 2)$ را مساوی $r = \sqrt{10}$ می گذاریم تا α پیدا شود:

$$OA = r \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + ((\alpha + 1) - 2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 1)^2 = 10 \Rightarrow 2\alpha^2 - 8\alpha + 10 = 10 \Rightarrow 2\alpha(\alpha - 4) = 0 \Rightarrow \alpha = 0, 4$$

اگر دو مقدار به دست آمده برای α را در $O(\alpha, \alpha + 1)$ جای گذاری کنیم، مختصات O و O' به این صورت می شود:

$$O(0, 1), O'(4, 5)$$

گام ۳ (نوشتن معادله دایره ها) حالا که مرکز و شعاع دایره ها را داریم، می توانیم به کمک مورد (۲) درس نامه معادله هایشان را بنویسیم:

$$C_1: (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 10$$

$$C_2: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 10$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال) طبق مورد (۳) درس نامه برای به دست آوردن نقطه یا نقطه های برخورد دایره های C_1 و C_2 با محور x ، $y = 0$ را در معادله آن ها جای گذاری می کنیم:

$$C_1: y = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

همین جا معلوم می شود که فاصله بین نقاط برخورد دایره C_1 با محور x ها برابر $6 = (-3) - (3)$ است، پس دیگر نیازی به جای گذاری $y = 0$ در معادله دایره C_2 نداریم.

۳۲ - گزینه ۴

درس نامه ۱ اگر $\vec{a}'$ ، تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b باشد، در این صورت $\vec{a}'$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

۲ ضرب داخلی دو بردار مثل $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

۳ اندازه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



گام ۳ سؤال جواب‌های طبیعی x و y را می‌خواهد، پس نامعادله‌های $x \geq 1$ و $y \geq 1$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y \geq 1 \Rightarrow 17k + 1 \geq 1 \Rightarrow 17k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0 \\ x \geq 1 \Rightarrow 57 - 18k \geq 1 \Rightarrow 18k \leq 56 \Rightarrow k \leq 3/... \end{cases}$$

اشتراک $\rightarrow 0 \leq k \leq 3/... \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$

برای k مقدار صحیح پیدا شد، پس معادله ۴ جواب طبیعی دارد.

تله یک وقت فکر نکنید چون تعداد جواب‌های طبیعی را می‌خواهیم پس $k = 0$ غیر قابل قبول است، این طوری در تله ۴ می‌افتید. حواستان باشد می‌خواهیم x و y طبیعی باشند، نه k . به ازای $k = 0$ هم x طبیعی است؛ هم y :

$$\begin{cases} y = 17k + 1 \xrightarrow{k=0} y = 1: \text{طبیعی} \\ x = 57 - 18k \xrightarrow{k=0} x = 57: \text{طبیعی} \end{cases}$$

۳۸ - گزینه ۲

استراتژی اول به کمک نامساوی $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ کران پایین $\gamma(G)$ را به دست می‌آوریم؛ بعد سعی می‌کنیم مثالی بنویسیم که با همان کران پایین گراف احاطه شود. اگر چنین مثالی وجود داشت، جواب معلوم می‌شود؛ ولی اگر وجود نداشت کران پایین $\gamma(G)$ را یکی یکی زیاد می‌کنیم تا بالاخره مثال هم پیدا شود.

درس‌نامه ۱ به زیرمجموعه D از رئوس گراف G ، مجموعه احاطه‌گری می‌گوییم، هر وقت رأس‌های گراف G یا در D باشند یا حداقل یکی از رئوس D مجاور باشند. مثلاً در گراف مقابل، این مجموعه‌ها $\{a, c\} - \{a, d, b\} - \{e, c\} - \{a, b, c\} - \dots$ همه احاطه‌گرند:

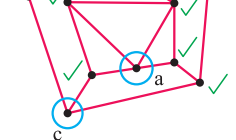
۲ به مجموعه احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را داشته باشد، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. مثلاً در گراف بالا $\gamma(G) = 2$ است.

۳ اگر بزرگ‌ترین درجه یک گراف n رأسی، Δ باشد؛ کران پایین $\gamma(G)$ از این نامساوی پیدا می‌شود:

گام ۱ اول باید کران پایین $\gamma(G)$ را به کمک مورد (۳) درس‌نامه حساب کنیم. با توجه به گراف مقابل، می‌توانیم بگوییم $\Delta = 4$ و $n = 11$ است، پس:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{11}{4+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

گام ۲ حالا به دنبال مثالی می‌گردیم که $\gamma(G) = 3$ شود. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید با انتخاب ۳ رأس a ، b و c گراف احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = 3$ قبول است.



۳۹ - گزینه ۴

استراتژی از گزینه‌ها کمک می‌گیریم؛ فقط با توجه به این که مسئله بیشترین مقدار m را می‌خواهد از بزرگ‌ترین گزینه شروع می‌کنیم. اگر این گزینه درست باشد، باید با انتخاب حداقل ۲۰ عضو از آن، مطمئن بشویم که ۲ عضو وجود دارد که جمعشان ۴۷ است.

بهترین کار استفاده از گزینه‌ها است. چون بیشترین مقدار m را می‌خواهیم، پس از بزرگ‌ترین گزینه، یعنی $m = 42$ در ۴ شروع می‌کنیم. به ازای $m = 42$ مجموعه داده‌شده به این صورت می‌شود:

$$\{2, 13, 14, \dots, 42\}$$

پس حق داریم در همنهشتی (۱) به جای 3^{23} ، عدد ۵ را جای گذاری کنیم:

$$3^{23} \times 2^7 \equiv 5 \times 2^7 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$(24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 3 \pmod{10} \quad (*)$$

بنابراین:

گام ۳ حالا می‌رویم سراغ باقی‌مانده بر ۸:

$$(24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv -(-3)^{23} \times 1 \equiv 3^{23} \pmod{8} \quad (2)$$

$\downarrow$
از ۵ تا ۸ افزایش برمی‌داریم.

باقی‌مانده 3^{23} بر ۸ را می‌خواهیم، پس به دنبال توانی از ۳ می‌گردیم که به پیمانه ۸ یا ۱ - همنهشت باشد:

حالا 3^2 در همنهشتی بالا را با ضرب و توان‌رسانی مناسب، به 3^{23} تبدیل می‌کنیم:

$$3^2 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان ۱۱}} 3^{22} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{23} \equiv 3$$

پس همنهشتی (۲) به این صورت درمی‌آید:

$$(24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 3 \pmod{8} \quad (**)$$

گام ۴ خوب به همنهشتی‌های (*) و (**) توجه کنید؛ طرفینشان یکسان و فقط پیمانه‌هایشان فرق می‌کند، پس می‌توانیم به کمک مورد (۱) درس‌نامه ترکیبشان کنیم.

$$\begin{cases} (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 3 \pmod{8} \\ (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 3 \pmod{5} \end{cases} \xrightarrow{[8,5]=40} (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 3 \pmod{40}$$

تیزبازی در گام ۲ دیدیم که باقی‌مانده عدد مورد نظر بر ۷ شد ۳؛ پس گزینه‌ای درست است که باقی‌مانده‌اش بر ۷ بشود ۳. تنها گزینه‌ای که این اتفاق برایش می‌افتد خود عدد ۳ در ۳ است.

۳۷ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ به معادله‌هایی به شکل $ax + by = c$ ، a ، b و c اعدادی صحیح‌اند) معادله سیاله خطی می‌گوییم. برای حل کردن این معادله‌ها کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) طرفین معادله را به پیمانه ضریب کوچک‌تر (یا a یا b) همنهشت قرار می‌دهیم تا به یک معادله همنهشتی برسیم.

ب) با حل معادله همنهشتی، فرم کلی یک مجهول را به دست می‌آوریم.

پ) مجهول به دست‌آمده را در معادله سیاله جای‌گذاری می‌کنیم تا مجهول دیگر هم به دست بیاید.

۲ اگر طرفین یک همنهشتی به پیمانه m بر عدد صحیحی مثل $a \neq 0$ بخش‌پذیر باشند، می‌توانیم a را از طرفین همنهشتی ساده کنیم؛ اما باید حواسمان باشد که پیمانه را هم بر (a, m) تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$ax \equiv ay \pmod{m} \xrightarrow{\div a} x \equiv y \pmod{\frac{m}{(a, m) = d}}$$

۳ هر همنهشتی مثل $a \equiv b \pmod{m}$ را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم؛ ببینید:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = mk + b$$

گام ۱ طرفین معادله $17x + 18y = 987$ را به پیمانه ضریب کوچک‌تر، یعنی ۱۷ همنهشت قرار می‌دهیم:

$$17x + 18y \equiv 987 \pmod{17} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow y = 17k + 1$$

گام ۲ حالا $y = 17k + 1$ را در معادله سیاله جای‌گذاری می‌کنیم تا بتوانیم x را هم بر حسب k به دست بیاوریم:

$$\begin{aligned} 17x + 18(17k + 1) &= 987 \Rightarrow 17x + 18(17k) + 18 = 987 \\ \Rightarrow 17x + 18(17k) &= 969 \xrightarrow{\div 17} x + 18k = 57 \Rightarrow x = 57 - 18k \end{aligned}$$



فیزیک

۴۱- گزینه ۲

درس نامه یک بار برای همیشه، کمیت‌های اصلی به همراه یکاهای آن‌ها را ببینید.

کمیت‌های اصلی و یکاهای اصلی دستگاه بین‌المللی (SI)		
نماد یکا	نام یکا	کمیت
m	متر	طول
kg	کیلوگرم	جرم
s	ثانیه	زمان
K	کلوین	دما
mol	مول	مقدار ماده
A	آمپر	جریان الکتریکی
cd	کنیدلا (شمع)	شدت روشنایی

یکاهای ژول و کولن به ترتیب مربوط به کمیت‌های انرژی و بار الکتریکی بوده و یکاهای فرعی هستند (رد ۱، ۳ و ۴).

مشاوره برای پاسخ دادن به این جور سؤال‌ها به دنبال رد گزینه باشید تا سریع‌تر به جواب برسید.

۴۲- گزینه ۴

دوقطبی‌های مغناطیسی مواد پارامغناطیسی، به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند (دوقطبی‌های مغناطیسی مواد فرومغناطیسی در ناحیه‌هایی که حوزه‌های مغناطیسی نام دارند، هم‌جهت هستند). با قراردادن مواد پارامغناطیسی درون میدان مغناطیسی خارجی قوی، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان مغناطیسی منظم می‌شوند؛ بنابراین مواد پارامغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند.

مشاوره این سؤال از متن کتاب درسی طراحی شده است؛ پس خطبه‌خط کتاب درسی را بخوانید چون ممکن است سؤال ساده‌ای مثل این سؤال را از دست بدهید!

۴۳- گزینه ۲

از مقاومت‌های نوری (LDR) در تجهیزات گوناگونی از جمله چشم‌های الکترونیکی، دزدگیرها، کنترل‌کننده‌های خودکار و چراغ‌های روشنایی خیابان‌ها استفاده می‌شود.

مشاوره برای موفقیت در کنکور باید بر کتاب درسی مسلط باشید. همان‌طور که می‌بینید، سه سؤال اول این آزمون عیناً از کتاب درسی طراحی شده‌اند.

۴۴- گزینه ۱

استراتژی در سؤالاتی که تندی متوسط متحرک در بازه زمانی مشخصی را می‌خواهد، یکی از بهترین روش‌ها رسم نمودار سرعت - زمان متحرک است، چون با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t می‌توانیم مسافت پیموده‌شده و در نتیجه تندی متوسط متحرک را به دست بیاوریم.

درس نامه ۱ معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

مکان اولیه سرعت اولیه شتاب
 (m) (m/s) (m/s^2)
 $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

۲ معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

۳ مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در یک بازه زمانی، بیانگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در آن بازه زمانی است. مثلاً در نمودار سرعت - زمان روبه‌رو، مسافت طی‌شده توسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t_2 به صورت مقابل به دست می‌آید.

نکته در مسائل اصل لانه‌کبوتری با خواسته سؤال تا جای ممکن لج می‌کنیم تا بدترین حالت ممکن اتفاق بیفتد. یکی بیشتر از بدترین حالت ممکن می‌شود جواب مسئله. حالا طبق نکته بالا با خواسته سؤال لج می‌کنیم. برای این کار همه دوعضوی‌هایی را که مجموع اعضایشان ۴۷ می‌شود و همین‌طور تک عضوهایی را که این امکان برایشان وجود ندارد، می‌نویسیم:

$$\{23, 24\} \dots \{13, 34\} \dots \{12, 35\} \dots \{36\} \dots \{41\} \dots \{42\}$$

$\xleftarrow{23+24=47} \xleftarrow{13+34=47} \xleftarrow{12+35=47} \xleftarrow{36=47} \xleftarrow{41=47} \xleftarrow{42=47}$

سؤال می‌خواهد مجموع ۴۷ شود، برای لج‌بازی با این موضوع، از هر کدام از ۱۹ مجموعه بالا یک عضو برمی‌داریم.

این کار نهایت لج‌بازی است. ۱۹ عدد داریم که جمع هیچ دوتایی از آن‌ها ۴۷ نمی‌شود، اما به محض این‌که عدد بعدی (۲۰ امی) را برداریم، دو عدد در یک مجموعه قرار می‌گیرند و مجموعشان حتماً ۴۷ می‌شود؛ بنابراین $m = 42$ شرایط مسئله را برآورده می‌کند و درست است.

مشاوره در کنکورهای قبلی همیشه مجموعه را می‌دادند و می‌گفتند حداقل چند عضو برداریم تا مطمئن شویم حداقل دو عضو وجود دارد که مجموعشان فلان عدد باشد؛ اما در این کنکور برای اولین بار سؤال را برعکس طراحی کردند که در نوع خودش جدید است؛ پس لطفاً استراتژی حل این سؤال را در ذهنتان save کنید.

۴۵- گزینه ۳

- شفاف‌سازی ۱** $|V(G)| = 18$ ، یعنی $p = 18$ است.
۲ $\Delta(G) = 8$ ، یعنی بزرگ‌ترین درجه گراف ۸ است.
۳ $\delta(G) = 3$ ، یعنی کوچک‌ترین درجه گراف ۳ است.

درس نامه ۱ مجموع درجات رئوس هر گراف، دو برابر تعداد یال‌هایش (q) است، یعنی:

۲ تعداد رأس‌های فرد هر گراف همیشه عددی زوج است؛ اما تعداد رأس‌های زوج نگاهش به مرتبه است:

♦ اگر p زوج باشد، تعداد رأس‌های زوج هم عددی زوج است.
 ♦ اگر p فرد باشد، تعداد رأس‌های زوج هم عددی فرد است.

گام ۱ طبق شفاف‌سازی با گرافی از مرتبه $p = 18$ ، کوچک‌ترین درجه ۳ و بزرگ‌ترین درجه ۸ طرفیم. طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌دانیم:

پس برای به دست آوردن بیشترین اندازه گراف باید کاری کنیم که مجموع درجاتش بیشترین شود، بنابراین درجه‌ها را تا می‌توانیم ۸ در نظر می‌گیریم؛ فقط باید حواسمان باشد، چون $\delta = 3$ است، پس یکی از درجه‌ها را ۳ بگذاریم:

$$\text{درجه‌ها: } \underbrace{8, 8, 8, \dots, 8}_{17 \text{ دونه}}, 3$$

اما طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌دانیم که تعداد ۳ها نمی‌تواند عددی فرد (۱ دونه) باشد. از طرفی چون مرتبه گراف زوج است؛ تعداد ۸ها هم باید زوج باشد، پس یکی از ۸ها را به ۷ تبدیل می‌کنیم تا مشکلمان برطرف شود:

$$\underbrace{8, 8, 8, \dots, 8}_{16 \text{ دونه}}, 7, 3$$

در این حالت $q_{\max}$ برابر می‌شود با:

$$\underbrace{8+8+\dots+8}_{16 \text{ دونه}} + 7 + 3 = 2q_{\max} \Rightarrow 138 = 2q_{\max} \Rightarrow q_{\max} = 69$$

گام ۲ برای محاسبه $q_{\min}$ هم تا می‌توانیم درجه‌ها را ۳ در نظر می‌گیریم؛ فقط چون $\Delta = 8$ است مجبوریم درجه یک رأس را ۸ بگذاریم:

$$\underbrace{3, 3, 3, \dots, 3}_{17 \text{ دونه}}, 8$$

اما قرار شد تعداد ۳ها زوج و همین‌طور تعداد رأس‌های با درجه زوج هم، عددی زوج باشد؛ پس به جای یکی از ۳ها، ۴ می‌گذاریم تا مشکل برطرف شود:

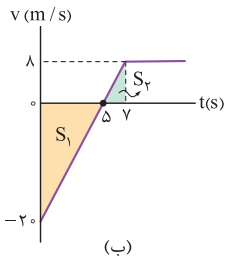
$$\underbrace{3, 3, 3, \dots, 3}_{16 \text{ دونه}}, 4, 8$$

در نتیجه $q_{\min}$ می‌شود:

$$\underbrace{3+3+\dots+3}_{16 \text{ دونه}} + 4 + 8 = 2q_{\min} \Rightarrow 60 = 2q_{\min} \Rightarrow q_{\min} = 30$$

بنابراین اختلاف $q_{\max}$ و $q_{\min}$ برابر است با:

$$q_{\max} - q_{\min} = 69 - 30 = 39$$



فب ... بریم سراغ نمودار سرعت - زمان متحرک! همان طور که در شکل (ب) می بینید، متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ s تا $t_2 = 5$ s در خلاف جهت محور X حرکت می کند و در لحظه $t_2 = 5$ s تغییر جهت داده و در جهت محور X به حرکت خود ادامه می دهد. برای این که ببینیم متحرک چند متر در خلاف جهت محور X حرکت کرده است، مساحت S_1 را به دست می آوریم.

$$S_1 = \frac{20 \times 5}{2} = 50 \text{ m} \xrightarrow{\Delta x_1 < 0} \Delta x_1 = -50 \text{ m}$$

با توجه به این که متحرک در لحظه $t_1 = 0$ s در مکان $x_1 = 42 \text{ m}$ است، پس در لحظه $t_2 = 5$ s به مکان $x_2 = -8 \text{ m}$ می رسد (شکل پ). حالا با توجه به شکل (ب)، مساحت S_2 را محاسبه می کنیم.

$$S_2 = \frac{2 \times 8}{2} = 8 \text{ m} \xrightarrow{\Delta x_2 > 0} \Delta x_2 = 8 \text{ m}$$

یعنی متحرک از لحظه $t_2 = 5$ s تا لحظه $t_3 = 7$ s به اندازه 8 m در جهت محور X حرکت می کند و در نتیجه به مکان $x_3 = 0 \text{ m}$ می رسد (شکل ت).

طبق خواسته سؤال، باید ببینیم متحرک در چه لحظه ای به مکان $x_4 = 10 \text{ m}$ می رسد. چون متحرک در لحظه $t_3 = 7$ s در مکان $x_3 = 0 \text{ m}$ قرار دارد، پس مساحت S_3 را برابر با 10 m قرار می دهیم تا لحظه ای را که متحرک به مکان $x_4 = 10 \text{ m}$ می رسد، به دست بیاوریم (شکل ث).

بنابراین متحرک در لحظه $t_4 = 8/25 \text{ s}$ به مکان $x_4 = 10 \text{ m}$ می رسد (شکل ج). همان طور که در شکل (ج) می بینید، متحرک از لحظه $t_1 = 0$ s تا $t' = 2$ s به اندازه 32 m در خلاف جهت محور X و از لحظه

$t' = 2$ s تا $t_2 = 5$ s به اندازه 18 m در خلاف جهت محور X جابه جا می شود؛ بنابراین در نمودار سرعت - زمان متحرک $S_4 = 32 \text{ m}$ و $S_5 = 18 \text{ m}$ است (شکل چ). با توجه به این که نسبت مساحت های دو مثلث متشابه برابر با مربع نسبت تشابه آن ها است، لحظه t' را به دست می آوریم.

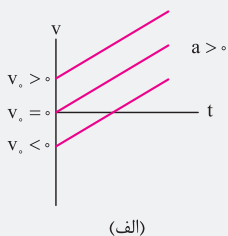
$$\frac{S_5}{S_4 + S_5} = \left(\frac{5 - t'}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{18}{32 + 18} = \left(\frac{5 - t'}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{5 - t'}{5} \Rightarrow t' = 2 \text{ s}$$

بنابراین فاصله متحرک تا مبدأ محور $(x = 0 \text{ m})$ از لحظه $t' = 2$ s تا لحظه $t_2 = 5$ s، یعنی به مدت $(5 - 2) \times 2/25 = 6/25 \text{ s}$ کم تر یا مساوی 10 متر است.

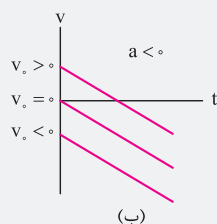


گزینه ۴۶

درس نامه شیب نمودار سرعت - زمان متحرک در هر لحظه، بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است؛ بنابراین نمودار سرعت - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می کند، به صورت یک خط راست است (شکل های الف و ب).



(الف)



(ب)

$l_1 = S_1$: مسافت طی شده در بازه زمانی صفر تا t_1

$l_2 = S_2$: مسافت طی شده در بازه زمانی t_1 تا t_2

$\Rightarrow l = l_1 + l_2 = S_1 + S_2$: مسافت طی شده در بازه زمانی صفر تا t_2

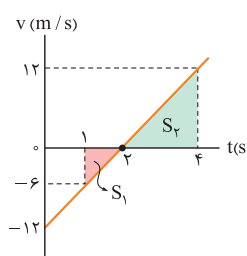
$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

۴ تندی متوسط: نسبت مسافت طی شده به مدت زمان.

گام ۱ معادله مکان - زمان متحرک از نوع درجه ۲ است؛ پس حرکت متحرک از نوع حرکت با شتاب ثابت است. ابتدا معادله مکان - زمان متحرک را با فرم کلی معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست مقایسه می کنیم.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$x = 3t^2 - 12t + 9 \Rightarrow \frac{1}{2}a = 3 \Rightarrow a = 6 \text{ m/s}^2, v_0 = -12 \text{ m/s}$$



گام ۲ برای این که تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1$ s تا $t_2 = 4$ s را به دست بیاوریم، به مسافت طی شده در این بازه زمانی نیاز داریم. بهترین روش برای پیدا کردن مسافت، رسم نمودار سرعت - زمان متحرک است؛ پس به سراغ معادله سرعت - زمان متحرک می رویم تا با استفاده از آن، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنیم.

$$v = at + v_0 \xrightarrow{a=6 \text{ m/s}^2, v_0=-12 \text{ m/s}} v = 6t - 12$$

$$v_{(t_1=1 \text{ s})} = 6(1) - 12 = -6 \text{ m/s}$$

$$v_{(t_2=4 \text{ s})} = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}$$

گام ۳ حالا مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1$ s تا $t_2 = 4$ s را با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t به دست می آوریم.

$$l = S_1 + S_2 = \frac{1 \times 6}{2} + \frac{2 \times 12}{2} = 3 + 12 = 15 \text{ m}$$

گام ۴ در آخر، خواسته سؤال یعنی تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1$ s تا $t_2 = 4$ s را محاسبه می کنیم.

$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{15}{4-1} = 5 \text{ m/s}$$

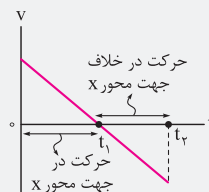
تله اگر سرعت متوسط متحرک را به دست بیاورید، به **۳** می رسید.



گزینه ۴۵

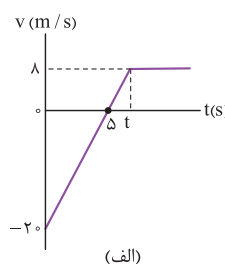
درس نامه

در نمودار سرعت - زمان



$v > 0 \Rightarrow$ متحرک در جهت محور X حرکت می کند.
 $v < 0 \Rightarrow$ متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می کند.

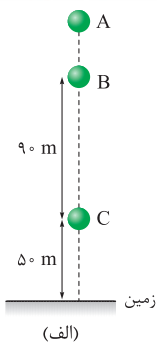
گام ۱ ابتدا با استفاده از تشابه مثلث ها، لحظه t را به دست می آوریم تا اطلاعات نمودار سرعت - زمان متحرک کامل شود (شکل الف).



(الف)

$$\frac{1}{2} = \frac{t-5}{5} \Rightarrow t = 7 \text{ s}$$

گام ۲ سؤال از ما مدت زمانی را که فاصله متحرک تا مبدأ محور $(x = 0 \text{ m})$ کم تر یا مساوی 10 متر است، می خواهد؛ یعنی باید ببینیم چند ثانیه متحرک در محدوده مکانی $10 \text{ m} \geq x \geq -10 \text{ m}$ است.



گام ۳ گلوله فاصله بین دو نقطه B و C را در مدت زمان ۳ s طی می کند (شکل الف).

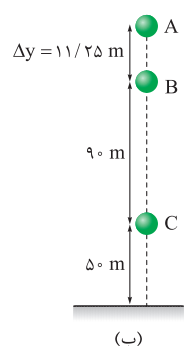
با استفاده از رابطه مستقل از شتاب در سقوط آزاد و همچنین شتاب متوسط می توانیم بنویسیم (در تمام مراحل جهت مثبت Y را رو به پایین فرض کردیم):

$$\frac{v_B + v_C}{2} = \frac{90}{3} \Rightarrow v_B + v_C = 60 \text{ m/s} \quad (1)$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad a = g = 10 \text{ m/s}^2 \rightarrow 10 = \frac{v_C - v_B}{3}$$

$$\Rightarrow v_C - v_B = 30 \text{ m/s} \quad (2)$$

پس با توجه به رابطه های (۱) و (۲)، $v_B = 15 \text{ m/s}$ و $v_C = 45 \text{ m/s}$ است.



گام ۴ حالا با استفاده از رابطه مستقل از زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه، فاصله بین دو نقطه A و B را پیدا می کنیم.

$$v_B^2 = 2g\Delta y$$

$$\frac{v_B = 15 \text{ m/s}}{g = 10 \text{ m/s}^2} \rightarrow 15^2 = 2 \times 10 \times \Delta y \Rightarrow \Delta y = 11/25 \text{ m}$$

بنابراین با توجه به شکل (ب)، فاصله بین نقطه A تا سطح زمین برابر با $11/25 + 90 + 50 = 151/25 \text{ m}$ است.

گام ۵ در ادامه، مدت زمان حرکت گلوله از نقطه A تا سطح زمین را با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه به دست می آوریم.

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \Rightarrow 151/25 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t^2 = 30/25 \Rightarrow t = 5/5 \text{ s}$$

گام ۶ سؤال از ما ارتفاع گلوله ۳ s قبل از برخورد به سطح زمین را می خواهد. در این لحظه، گلوله به اندازه $(5/5 - 3) \times 2/5 \text{ s}$ حرکت می کند؛ پس جابه جایی گلوله در این مدت زمان را محاسبه می کنیم.

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \times 10 \times (2/5)^2 = 31/25 \text{ m}$$

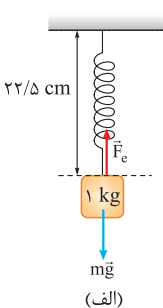
بنابراین گلوله ۳ ثانیه قبل از رسیدن به زمین از ارتفاع $(151/25 - 31/25) = 120 \text{ m}$ عبور می کند.



۴۸ - گزینه ۱

ثابت فنر (N/m)
 $F_e = k \Delta \ell$
تغییر طول فنر (m)

درس نامه اندازه نیروی کشسانی فنر:

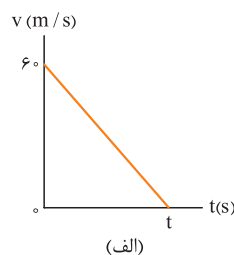
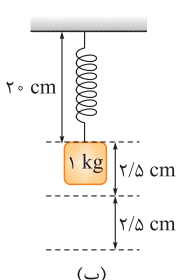


گام ۱ وقتی وزنه را به انتهای فنری که از نقطه ثابتی آویزان است می بندیم، پس از مدتی به تعادل می رسند. طول فنر را در این حالت به دست می آوریم (شکل الف).

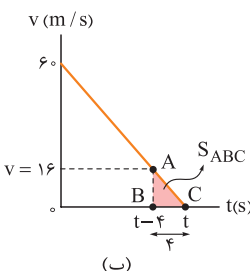
$$F_e = mg \Rightarrow k\Delta \ell = mg \Rightarrow 40 \times (\ell - 0/2) = 1 \times 10 \Rightarrow \ell - 0/2 = 0/25 \Rightarrow \ell = 0/25 \text{ m} = 22/5 \text{ cm}$$

گام ۲ حالا اگر وزنه - فنر را ۲/۵ cm فشرده کنیم (طول فنر به ۲۰ cm برسد) سپس در این وضعیت از حال سکون رها کنیم، سامانه جرم - فنر شروع به حرکت هماهنگ ساده می کند.

با توجه به این که فنر را از حالت تعادل به اندازه ۲/۵ cm فشرده کردیم، پس دامنه نوسان، ۲/۵ cm است؛ بنابراین طول فنر در این حرکت هماهنگ ساده از ۲۰ cm $(22/5 - 2/5) = 20 \text{ cm}$ تا ۲۵ cm تغییر می کند و بیشترین طول فنر به ۲۵ cm می رسد. در لحظه ای که طول فنر به ۲۵ cm (بیشترین طول فنر) می رسد، وزنه در انتهای پاره خط نوسان قرار دارد؛ پس تندی آن در این لحظه صفر است (شکل ب).



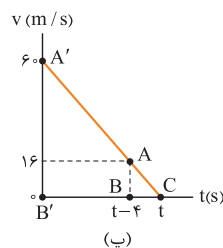
گام ۱ سرعت اولیه هواپیما 60 m/s است $(v_0 = 60 \text{ m/s})$ و پس از مدتی حرکت با شتاب ثابت، متوقف می شود $(v = 0 \text{ m/s} \text{ و } a < 0)$. با توجه به این توضیحات، نمودار سرعت - زمان هواپیما را رسم می کنیم (شکل الف).



گام ۲ هواپیما ۳۲ m پایانی مسیر مستقیم خود را در مدت ۴ s طی کرده است؛ بنابراین با توجه به این که مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان متحرک و محور t بیانگر مسافت طی شده توسط متحرک است، پس $S_{ABC} = 32 \text{ m}$ است (شکل ب) و می توانیم بنویسیم:

$$\frac{v \times 4}{2} = 32 \Rightarrow v = 16 \text{ m/s}$$

گام ۳ حالا از تشابه دو مثلث $A'B'C$ و ABC استفاده می کنیم و خواسته سؤال یعنی $S_{A'B'C}$ (مسافت کل) را به دست می آوریم (شکل پ).



$$\frac{S_{A'B'C}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{A'B'C}}{32} = \left(\frac{16}{60}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{A'B'C}}{32} = \frac{16 \times 16}{3600} \Rightarrow S_{A'B'C} = 450 \text{ m}$$

مشاوره شما می توانید برای تمام مسائل حرکت بر خط راست، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنید، اما گاهی اوقات رسم این نمودار دشوار و وقت گیر است و حل مسئله را پیچیده می کند و گاهی اوقات هم رسم آن به سادگی امکان پذیر است (مثل همین سؤال) و حل مسئله را ساده می کند.



۴۷ - گزینه ۳

درس نامه ۱ شتاب متوسط: اگر سرعت متحرکی در لحظه t_1 برابر با v_1 و در لحظه t_2 برابر با v_2 باشد، شتاب متوسط آن در این بازه زمانی از رابطه زیر به دست می آید.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

۲ رابطه مستقل از زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه: (جهت مثبت Y را رو به پایین فرض کردیم).

$$v^2 = 2g\Delta y$$

شتاب گرانش (m/s^2) جابه جایی در راستای قائم (m) سرعت (m/s)

۳ رابطه مستقل از شتاب در سقوط آزاد: (جهت مثبت Y را رو به پایین فرض کردیم).

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \rightarrow \text{مدت زمان (s)}$$

سرعت ابتدایی (m/s) سرعت نهایی (m/s)

۴ معادله مکان - زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه: (جهت مثبت Y را رو به پایین فرض کردیم).

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

مکان اولیه (m) زمان (s)



گزینه ۳ - ۴۹

درس نامه ۱ قانون دوم نیوتون:

نیروی خالص (N)
جرم (kg)
 $F_{net} = ma$
شتاب (m/s^2)

۲ نیروی اصطکاک جنبشی:

نیروی عمودی سطح (N)
 $f_k = \mu_k F_N$
ضرب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح

گام ۱ در حالت اول، جسم با شتاب ثابت حرکت می‌کند (شکل الف)؛ بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع نیروی اصطکاک جنبشی است و با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

$$F_N = 20 \text{ N}$$

(الف)

$$F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \xrightarrow{f_k = \mu_k F_N} F - \frac{1}{4} \times 20 = 2a$$

$$\Rightarrow F - 5 = 2a \quad (1)$$

گام ۲ در حالت دوم، جسم در حال حرکت است و نیروی عمودی ۳۰ N رو به پایین بر آن وارد می‌شود و پس از وارد شدن این نیرو، جسم با سرعت ثابت ($a' = 0$) به حرکت خود ادامه می‌دهد (شکل ب)؛ بنابراین با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

(ب)

$$F_{net} = ma' \xrightarrow{a'=0} F - f'_k = 0$$

$$\xrightarrow{f'_k = \mu_k F'_N, \mu_k = \frac{1}{4}} \xrightarrow{F'_N = F' + mg = 30 + 20 = 50 \text{ N}} F = \frac{1}{4} \times 50 = 12.5 \text{ N}$$

گام ۳ در آخر، مقدار $F = 12.5 \text{ N}$ را در رابطه (۱) جای‌گذاری می‌کنیم و شتاب جسم در حالت اول (a) را به دست می‌آوریم.

$$F - 5 = 2a \Rightarrow 12.5 - 5 = 2a \Rightarrow a = 3.75 \text{ m/s}^2$$

گزینه ۲ - ۵۰

درس نامه رابطه مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

سرعت ابتدایی سرعت نهایی
(m/s) (m/s)
شتاب (m/s^2)
 $v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$
جابه‌جایی (m)

گام ۱ ابتدا شتاب خودرو در حین ترمز را با استفاده از رابطه مستقل از زمان به دست می‌آوریم.

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v_f = 0 \text{ m/s}, v_i = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}} 0 - 15^2 = 2a(22.5)$$

$$\Rightarrow -225 = 2a \times 22.5 \Rightarrow a = -5 \text{ m/s}^2$$

گام ۲ حالا با توجه به شکل زیر و با استفاده از قانون دوم نیوتون، ضریب اصطکاک جنبشی بین لاستیک‌ها و جاده را محاسبه می‌کنیم.

(الف)

$$F_{net} = ma \Rightarrow 0 - f_k = ma$$

$$\xrightarrow{f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg} \xrightarrow{a = -5 \text{ m/s}^2} -\mu_k mg = ma$$

$$\xrightarrow{a = -5 \text{ m/s}^2} \mu_k = 0.5$$

گزینه ۴ - ۵۱

شفاف‌سازی چون حرکت ماهواره‌ها به صورت حرکت دایره‌ای یکنواخت است، پس شتاب حرکت ماهواره‌ها همان شتاب گرانش در محل ماهواره‌ها است.

درس نامه ۱ در حرکت ماهواره، مربع دوره تناوب (T^2) متناسب با مکعب شعاع مدار چرخش ماهواره (r^3) است.

$$T^2 \propto r^3 \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

۲ اگر شتاب گرانش در فاصله r_1 از مرکز سیاره‌ای برابر با g_1 و در فاصله r_2 از مرکز همان سیاره برابر با g_2 باشد، رابطه نسبیتی زیر برقرار است.

$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

گام ۱ ابتدا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، شعاع مدار ماهواره A را نسبت به شعاع مدار ماهواره B به دست می‌آوریم.

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \xrightarrow{T_A = \sqrt{2} T_B} \left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{1}{2}$$

گام ۲ در این‌جا حرکت ماهواره‌ها، به صورت حرکت دایره‌ای یکنواخت است و نیروی گرانشی، نیروی مرکز‌گرا را تأمین می‌کند؛ بنابراین شتاب ماهواره‌ها، همان شتاب گرانش در محل ماهواره‌ها است و می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{g_B}{g_A} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 \Rightarrow \frac{a_B}{a_A} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

گزینه ۲ - ۵۲

شفاف‌سازی طول پاره‌خط نوسان، ۱۰ cm است، پس دامنه نوسان $(A = \frac{1}{2} \times 10 \text{ cm}) = 5 \text{ cm}$ است. هم‌چنین بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر همان انرژی مکانیکی نوسانگر است.

درس نامه ۱ رابطه بین بسامد نوسانگر و دوره تناوب آن:

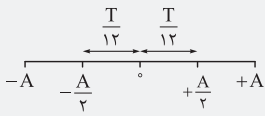
۲ انرژی مکانیکی نوسانگر:

$$f = \frac{1}{T}$$

جرم (kg)
انرژی مکانیکی (J)
دامنه (m)
بسامد (Hz)

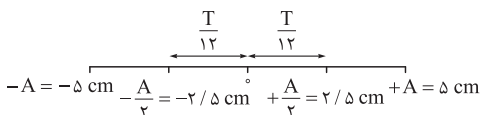
$$E = 2\pi^2 m f^2 A^2$$

۳ در حرکت هماهنگ ساده، برای این‌که نوسانگر از مکان $x = \pm \frac{A}{2}$ به مکان $x = 0$ (وضعیت تعادل) برسد، حداقل به مدت‌زمان $\frac{T}{12}$ نیاز است.



گام ۱ طول پاره‌خط نوسان ۱۰ cm و در نتیجه دامنه نوسان $(A = \frac{1}{2} \times 10 \text{ cm}) = 5 \text{ cm}$ است.

از آن‌جا که تندی نوسانگر در نقطه تعادل ($x = 0$) بیشینه است، پس حداقل زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر مسافت ۵ cm را طی کند، مربوط به حالتی است که نصف آن (یعنی ۲.۵ cm) قبل از رسیدن به نقطه تعادل و نصف دیگر آن (یعنی ۲.۵ cm) پس از نقطه تعادل باشد.



طبق گفته سؤال، این مدت‌زمان برابر با $\frac{1}{3} S$ است؛ بنابراین با توجه به شکل بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$2\left(\frac{T}{12}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow T = \frac{1}{5} \text{ s}$$

گام ۲ حالا بیشینه انرژی جنبشی (انرژی مکانیکی) نوسانگر را محاسبه می‌کنیم.

$$K_{max} = E = 2\pi^2 m f^2 A^2$$

$$\xrightarrow{m=2 \times 10^{-3} \text{ kg}, f=\frac{1}{5} \text{ Hz}, A=5 \times 10^{-2} \text{ m}} K_{max} = 2 \times (2)^2 \times 10^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times (5 \times 10^{-2})^2$$

$$\xrightarrow{f=\frac{1}{5} \text{ Hz}, A=5 \times 10^{-2} \text{ m}} K_{max} = 4 \times 10^{-4} \text{ J} \xrightarrow{1 \text{ J} = 10^3 \text{ mJ}} K_{max} = 0.4 \text{ mJ}$$

گزینه ۳ - ۵۳

شفاف‌سازی با توجه به معادله مکان - زمان نوسانگر $\omega = 5\pi \text{ rad/s}$ و $A = 0.3 \text{ m}$ است.



تیزبازی در این سؤال می‌توانید ۲ و ۴ را به سرعت حذف کنید، چون $\vec{B}$ نمی‌تواند با $\vec{E}$ هم‌راستا باشد.



۵۵- گزینه ۲

شفاف‌سازی چون نور از خلأ وارد محیط شفاف می‌شود، پس طول موج آن کاهش می‌یابد. هم‌چنین بسامد نور در خلأ و محیط شفاف یکسان است.

درس‌نامه ۱ رابطه بین طول موج، تندی انتشار موج و بسامد موج:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow (m/s) \text{ تندی انتشار}$$

$$\downarrow$$

$$f \rightarrow (Hz) \text{ بسامد}$$

$$\downarrow$$

$$(m) \text{ طول موج}$$

۲ نسبت ضریب شکست دو محیط با نسبت طول موج نور در آن دو محیط رابطه معکوس دارد.

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

گام ۱ با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، طول موج نور در خلأ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lambda_1 = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{5 \times 10^{14} \text{ Hz}} \rightarrow \lambda_1 = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^{14}} = 6 \times 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

گام ۲ وقتی نور از خلأ وارد محیط شفاف می‌شود، تندی انتشار و در نتیجه طول موج آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین طول موج نور در محیط شفاف (λ_2) برابر است با:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - 150 \Rightarrow \lambda_2 = 600 - 150 = 450 \text{ nm}$$

گام ۳ حالا ضریب شکست محیط شفاف را به دست می‌آوریم.

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \rightarrow \frac{n_2}{1} = \frac{600}{450} \Rightarrow n_2 = \frac{4}{3}$$



۵۶- گزینه ۳

درس‌نامه برای محاسبه تندی انتشار موج عرضی در تار یا ریسمان کشیده‌شده با استفاده از قطر مقطع تار، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$v = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{F}{\rho \pi}} \rightarrow (N) \text{ نیروی کشش تار}$$

$$\downarrow$$

$$(m/s) \text{ تندی انتشار موج}$$

$$\downarrow$$

$$(kg/m^2) \text{ چگالی تار}$$

$$\downarrow$$

$$(m) \text{ قطر مقطع تار}$$

گام ۱ ابتدا تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم.

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow \frac{\lambda = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}}{f = 500 \text{ Hz}} \rightarrow \frac{0.25}{500} = \frac{v}{500} \Rightarrow v = 50 \text{ m/s}$$

گام ۲ حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، قطر مقطع سیم را محاسبه می‌کنیم.

$$v = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{F}{\rho \pi}} \rightarrow \frac{50}{d} = \frac{1}{\sqrt{\frac{F}{\rho \pi}}} \rightarrow \frac{50}{d} = \frac{1}{\sqrt{\frac{60}{8 \times 10^{-8} \times \pi}}} \Rightarrow \frac{50}{d} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{400}}} \Rightarrow d = \frac{1}{50} \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

مشاوره حتماً روابط مختلف تندی انتشار موج در تار یا ریسمان کشیده‌شده را حفظ باشید تا بتوانید به سرعت به چنین سؤالاتی پاسخ بدهید.



۵۷- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های فلز در اثر فوتوالکتریک:

$$K_{\max} = hf - hf_0$$

$$\downarrow$$

$$(Hz) \text{ بسامد فوتون}$$

$$\downarrow$$

$$(eV.s) \text{ ثابت پلانک}$$

$$\downarrow$$

$$(kg) \text{ جرم}$$

$$\downarrow$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

۲ انرژی جنبشی جسمی که با تندی v حرکت می‌کند:

درس‌نامه ۱ معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده:

$$x = A \cos \omega t \rightarrow (s) \text{ زمان}$$

$$\downarrow$$

$$(m) \text{ دامنه}$$

$$\downarrow$$

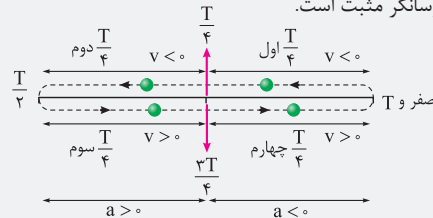
$$(rad/s) \text{ بسامد زاویه‌ای}$$

$$\downarrow$$

$$(m) \text{ مکان نوسانگر}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \text{دوره تناوب}$$

۲ با توجه به شکل زیر، در $\frac{T}{4}$ های اول و چهارم شتاب نوسانگر منفی و در $\frac{T}{4}$ های دوم و سوم شتاب نوسانگر مثبت است. از طرفی در $\frac{T}{4}$ های اول و دوم سرعت نوسانگر منفی و در $\frac{T}{4}$ های سوم و چهارم، سرعت نوسانگر مثبت است.



گام ۱ با استفاده از معادله مکان - زمان نوسانگر، دوره تناوب نوسانگر را به دست می‌آوریم.

$$x = A \cos \omega t \rightarrow x = 0.3 \cos 50\pi t \rightarrow \omega = 50\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 50\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{50\pi} = 0.04 \text{ s}$$

گام ۲ در $\frac{T}{4}$ سوم، بردار سرعت و شتاب نوسانگر هر دو مثبت هستند؛ بنابراین بازه زمانی مورد نظر $\frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}$ است.

$$\frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4} \Rightarrow 0.02 \text{ s} < t < 0.03 \text{ s}$$

مشاوره سعی کنید تمام اطلاعات حرکت بر خط راست و دینامیک نوسانگر را روی پاره‌خط نوسان تحلیل کنید و در یک صفحه به صورت خلاصه بنویسید و مرور کنید.



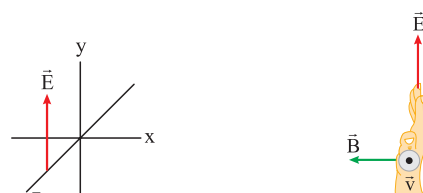
۵۴- گزینه ۱

شفاف‌سازی چون x است، پس عبارت «موج الکترومغناطیسی»

در جهت محور Z منتشر می‌شود؛ یعنی $\vec{v}$ به صورت برون سو ($\odot$) است.

درس‌نامه برای تعیین جهت انتشار موج الکترومغناطیسی از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، چهار انگشت دست راست را در جهت میدان الکتریکی ($\vec{E}$) طوری قرار می‌دهیم که میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود. در این حالت انگشت شست باز شده، جهت انتشار موج ($\vec{v}$) را نشان می‌دهد.

جهت میدان مغناطیسی موج را با استفاده از قاعده دست راست پیدا می‌کنیم (اگر این قاعده رو بلد نیستی، درس‌نامه رو بفون).

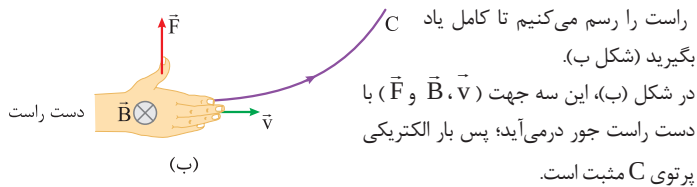


(در این جا در جهت محور Z یعنی برون سو ($\odot$))

بنابراین در این لحظه، جهت میدان مغناطیسی موج به سمت چپ (در خلاف جهت محور X) است.



پرتوی B هنگام عبور از میدان مغناطیسی، منحرف نشده است؛ پس این پرتو از لحاظ بار الکتریکی خنثی است (۳). پرتو را (۳) بزرگ کنید. گزینه درست معلوم شد! اما برای پرتوی C هم قاعده دست



گزینه ۴

درس نامه نیمه عمر: اگر تعداد هسته‌های مادر اولیه در یک نمونه پرتوزا N_0 باشد، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده پس از مدت زمان t از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$N = \frac{N_0}{2^n} \rightarrow \text{مدت زمان (s)} \rightarrow \frac{t}{T_{1/2}}, \quad n = \frac{t}{T_{1/2}} \rightarrow \text{نیمه عمر (s)}$$

تعداد هسته‌های اولیه N_0
تعداد نیمه عمر 2^n
تعداد هسته‌های باقی‌مانده

با توجه به این که ۷۵ درصد از ماده پرتوزا واپاشی شده است، تعداد هسته‌های باقی‌مانده را به دست می‌آوریم.

$$N = N_0 - \frac{75}{100} N_0 = \frac{1}{4} N_0$$

حالا داده‌ها را در رابطه زیر جای گذاری می‌کنیم و تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده را پیدا می‌کنیم.

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{4} N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 4 = 2^2 \Rightarrow n = 2$$

پس تعداد ۲ نیمه‌عمر در طی ۴ سال سپری شده است. نیمه‌عمر این ماده پرتوزا را به دست می‌آوریم.

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} \Rightarrow 2 = \frac{4}{T_{1/2}} \Rightarrow T_{1/2} = 2 \text{ سال}$$

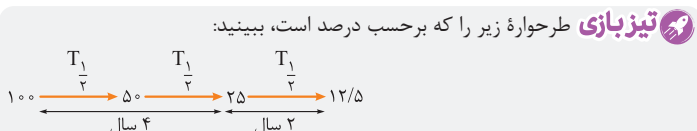
در ادامه، تعداد نیمه‌عمرهایی را که سپری می‌شود تا ۱۲/۵ درصد تعداد هسته‌های اولیه فعال باقی بماند، به دست می‌آوریم.

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{N_0 - 12.5\% N_0}{2^n} = \frac{1}{4} N_0 \Rightarrow \frac{1}{4} N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 4 = 2^2 \Rightarrow n = 2$$

در آخر مدت زمانی را که طول می‌کشد تا ۱۲/۵ درصد تعداد هسته‌های اولیه باقی بماند، محاسبه می‌کنیم.

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} \Rightarrow 3 = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 6 \text{ سال}$$

بنابراین ۲ (۶-۴) سال دیگر باید بگذرد تا تعداد هسته‌های باقی‌مانده، ۱۲/۵ درصد تعداد هسته‌های اولیه باشد.



تله اگر به واژه «دیگر» توجه نکنید، ممکن است گزینه نادرست (۳) را انتخاب کنید.

گزینه ۲

استراتژی ابتدا شکل مناسبی را رسم کنید و نقطه مورد نظر را روی آن نشان بدهید، سپس اندازه و جهت میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارهای q_1 و q_2 را در آن نقطه مشخص کنید و در انتها اندازه میدان الکتریکی خالص (برایند) را به دست بیاورید.

درس نامه ۱ اندازه میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار q در فاصله r از آن:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \rightarrow \text{بار الکتریکی (C)} \leftarrow \text{اندازه میدان الکتریکی (N/C)}$$

فاصله $r \rightarrow \text{م (m)}$
ثابت کولن $(\frac{N.m^2}{C^2})$

جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.

۲ جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.

بیشینه سرعت فوتوالکترون‌ها را داریم؛ پس بیشینه انرژی جنبشی آن‌ها را می‌توانیم محاسبه کنیم.

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{m_e \cdot 9 \times 10^{-31} \text{ kg}}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \times 10^6 \text{ m/s} \right)^2 \Rightarrow K_{\max} = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-31} \times \left(\frac{16}{9} \times 10^{12} \right) = 8 \times 10^{-19} \text{ J}$$

سؤال به ما ثابت پلانک (h) را برحسب eV.s داده است؛ پس با استفاده از نکته زیر، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها ($K_{\max}$) را برحسب eV به دست می‌آوریم.

نکته تبدیل یکای eV به J و برعکس.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \Rightarrow 1 \text{ J} = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$$K_{\max} = \frac{8 \times 10^{-19} \text{ J}}{1.6 \times 10^{-19}} = 5 \text{ eV}$$

حالا با جای گذاری داده‌ها در رابطه زیر، مقدار f را به دست می‌آوریم.

$$K_{\max} = hf - hf_0 \Rightarrow 5 = 4 \times 10^{-15} f - 4 \times 10^{-15} \times 5 \times 10^{14} \Rightarrow f = \frac{5}{4} \times 10^{15} = 1.25 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

گزینه ۲

شفاف سازی محدوده تقریبی طول موج نور مرئی از ۴۰۰ nm تا ۷۵۰ nm است.

درس نامه انرژی یک فوتون:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

طول موج فوتون (m)

محدوده تقریبی طول موج نور مرئی از ۴۰۰ nm تا ۷۵۰ nm است. با استفاده از رابطه زیر، کمینه و بیشینه انرژی فوتون در محدوده نور مرئی را به دست می‌آوریم (هواستون باشد که پهن hc برحسب nm.eV داریم، پس λ رو برحسب nm جای گذاری می‌کنیم).

$$E_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = \frac{1240}{400} = 3.1 \text{ eV}$$

$$E_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = \frac{1240}{750} = 1.65 \text{ eV}$$

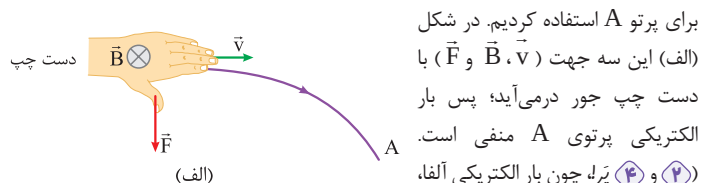
بنابراین انرژی فوتون در محدوده نور مرئی، در محدوده تقریبی $1.65 \text{ eV} \leq E \leq 3.1 \text{ eV}$ است که (۲) در این محدوده قرار دارد.

گزینه ۱

درس نامه ۱ برای تشخیص جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار، از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده اگر چهار انگشت دست راست را در جهت حرکت ذره با بار مثبت ($\vec{v}$) قرار بدهیم به طوری که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم، در جهت میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره ($\vec{F}$) را نشان می‌دهد. ۲ بار الکتریکی آلفا و پوزیترون مثبت و بار الکتریکی الکترون منفی است و گاما از لحاظ بار الکتریکی خنثی است.

نوع بار الکتریکی هر کدام از پرتوها را با استفاده از قاعده دست راست، مشخص می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راستمان را در جهت حرکت پرتو قرار بدهیم به طوری که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم در جهت میدان مغناطیسی قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی را نشان می‌دهد. اگر این سه جهت با دست راست جور دربیاید، بار الکتریکی پرتو مثبت و اگر با دست چپ جور دربیاید، بار الکتریکی آن منفی است. در شکل (الف)، از این قاعده برای پرتو A استفاده کردیم. در شکل (الف) این سه جهت $(\vec{F}, \vec{B}, \vec{v})$ با دست چپ جور درمی‌آید؛ پس بار الکتریکی پرتوی A منفی است.

۲ و ۴ پرتو چون بار الکتریکی آلفا، مثبت است.

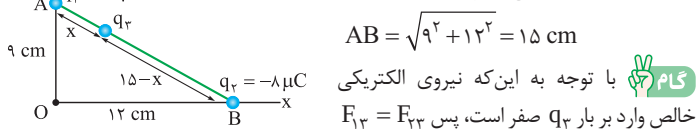




۲ اگر دو بار ذره‌ای q_1 و q_2 به فاصله r از یکدیگر قرار داشته باشند و بخواهیم نقطه‌ای را روی خط واصل دو بار یا امتداد آن به گونه‌ای تعیین کنیم که بار سوم q_3 در آن‌جا در حال تعادل بماند (یعنی نیروی خالص وارد بر آن صفر شود)، نقطه مورد نظر ویژگی‌های زیر را باید داشته باشد:

- ۱ در صورتی که q_1 و q_2 همنام باشند، بین آن دو و اگر ناهمنام باشند، خارج از فاصله بین دو بار است. ۲ همواره به باری نزدیک‌تر است که اندازه آن کوچک‌تر است.
- هواستون باشد که اندازه و علامت بار q_3 در پیدا کردن این نقطه تأثیری ندارد.

۳ در یک شکل بارهای الکتریکی و فاصله‌ها را در صفحه xy نشان می‌دهیم:



خالص وارد بر بار q_3 صفر است، پس $F_{r1} = F_{r2}$ است؛ بنابراین با استفاده از قانون کولن می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{r1} = F_{r2} \Rightarrow \frac{k |q_1| |q_3|}{r_{13}^2} = \frac{k |q_2| |q_3|}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(15-x)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{جنر}} \frac{1}{x} = \frac{2}{15-x} \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

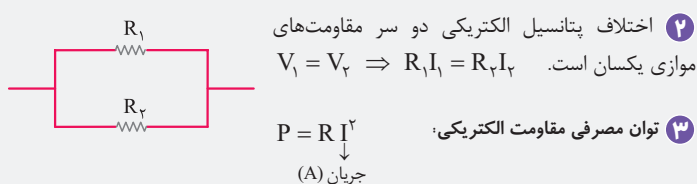
۴ اگر ۱ را انتخاب کردید، از کمبود دقت رنج می‌برید! ۱ فاصله بین q_1 و q_2 است، نه فاصله بین q_1 و q_3 !

۶۴- گزینه ۱

۱ استراتژی جریان عبوری از مقاومت ۴ اهمی را برابر I در نظر بگیرید و براساس آن جریان عبوری از مقاومت‌های 2Ω و 6Ω را به دست بیاورید، سپس نسبت توان مصرفی ($P = RI^2$) را برای مقاومت‌های ۶ اهمی و ۴ اهمی بنویسید.

۲ درس‌نامه ۱ تعریف مقاومت الکتریکی، نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانا

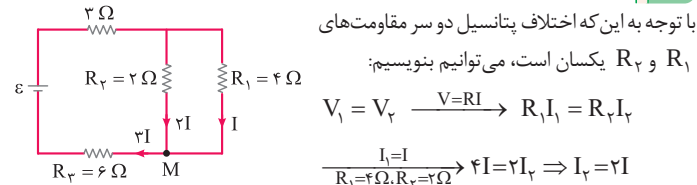
به جریان الکتریکی عبوری از آن. $R = \frac{V}{I} \rightarrow (V)$ اختلاف پتانسیل الکتریکی $\downarrow$ $I \rightarrow (A)$ جریان الکتریکی (مقاومت الکتریکی (Ω))



۳ توان مصرفی مقاومت الکتریکی، $P = R I^2$ (جریان A)

۴ قاعده انشعاب، مجموع جریان‌هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می‌شوند برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطه انشعاب (گره) خارج می‌شوند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو، جریان $I_1 + I_2 = 12 A$ به گره M وارد شده و جریان $I_3 + I_4 = 12 A$ از آن خارج شده است.

۵ در جریان عبوری از مقاومت R_1 را برابر I فرض می‌کنیم.

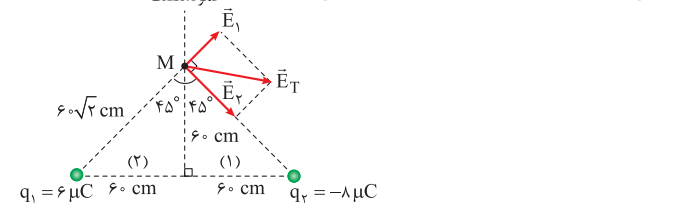


۶ حالا قاعده انشعاب را در گره M می‌نویسیم تا جریان عبوری از مقاومت R_3 را به دست بیاوریم.

۷ در آخر نسبت توان مصرفی مقاومت ۶ اهمی به توان مصرفی مقاومت ۴ اهمی را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{R_3 I_3^2}{R_1 I_1^2} = \frac{R_3 I^2}{R_1 I^2} = \frac{R_3}{R_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

۸ میدان‌های الکتریکی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ ناشی از بارهای q_1 و q_2 را در نقطه M روی شکل نشان می‌دهیم و اندازه هر یک از آن‌ها را به دست می‌آوریم.



$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-6}}{(6 \times 10^{-2})^2} = 1.5 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_2 = k \frac{|q_2|}{r_2^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-6}}{(6 \times 10^{-2})^2} = 2 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(1.5 \times 10^5)^2 + (2 \times 10^5)^2} = 2.5 \times 10^5 \text{ N/C}$$

۹ میدان الکتریکی خالص (برایند) حاصل از دو میدان الکتریکی عمود بر هم $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ را به دست می‌آوریم (هواستون باشد که مثلث‌های (۱) و (۲) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند).

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(1.5 \times 10^5)^2 + (2 \times 10^5)^2} = 2.5 \times 10^5 \text{ N/C}$$

۱۰ اگر در محاسبه اندازه میدان‌های الکتریکی E_1 و E_2 ، فاصله r را به اشتباه 6 cm در نظر بگیریم، به گزینه نادرست ۴ می‌رسیم.

۶۲- گزینه ۴

۱ چگالی سطحی بار الکتریکی، تراکم بار الکتریکی در سطح یک جسم را چگالی سطحی بار الکتریکی می‌گوییم و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \rightarrow (C) \text{ بار الکتریکی موجود در سطح } \downarrow \text{ مساحت سطح } (m^2)$$

$$A = 4\pi r^2$$

۲ مساحت سطح یک کره به شعاع r ، کافیت نسبت چگالی سطحی بار دو کره A و B را بنویسیم:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{Q_A}{Q_B} \times \frac{A_B}{A_A} = \frac{Q_B}{Q_A} \times \frac{4\pi r_B^2}{4\pi r_A^2} = \frac{r_B^2}{r_A^2} = \frac{1}{4}$$

۳ تله اگر در محاسبه مساحت سطح کره، شعاع را به توان ۲ نرسانیم، به گزینه نادرست ۱ می‌رسیم یا اگر نسبت $\frac{\sigma_B}{\sigma_A}$ را به دست بیاوریم، چشم به راه ماست.

۶۳- گزینه ۳

۴ استراتژی در یک شکل، بارهای q_1 و q_2 و فاصله بین آن‌ها را روی صفحه مختصات xy نشان بدهید. از آن‌جا که q_1 و q_2 همنام هستند، باید بار q_3 روی پاره خط AB قرار بگیرد و به بار q_1 نزدیک‌تر باشد و در آخر با استفاده از قانون کولن، F_{r1} را برابر با F_{r2} قرار بدهید.

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \rightarrow (m) \text{ فاصله } \downarrow \text{ نیروی الکتریکی } (N)$$



گزینه ۳ - ۶۶

درس نامه ۱ بزرگی میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله‌ای به طول ℓ و دور از لبه‌ها که از آن جریان I عبور می‌کند:

$$B = \frac{\mu_r N I}{\ell}$$

↑
تعداد حلقه‌ها

۲ ضریب القاوری (L) به مشخصات خود القاگر وابسته است و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$L = \frac{\mu_r N^2 A}{\ell} \rightarrow (\text{m}^2) \text{ سطح مقطع القاگر} \rightarrow (\text{m}) \text{ طول القاگر}$$

گام ۱ نسبت میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله A به سیم‌لوله B را به دست می‌آوریم.

$$\frac{B_A}{B_B} = \frac{N_A}{N_B} \times \frac{I_A}{I_B} \times \frac{\ell_B}{\ell_A} = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$

گام ۲ نسبت ضریب القاوری (L) سیم‌لوله A به سیم‌لوله B را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \times \frac{A_A}{A_B} \times \frac{\ell_B}{\ell_A} = 2^2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 2$$

گزینه ۲ - ۶۷

درس نامه ۱ خطوط میدان مغناطیسی در خارج از آهنربا از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند.

۲ قاعده دست راست برای تشخیص جهت میدان مغناطیسی در اطراف سیم راست:

انگشت شست دست راستمان را در جهت جریان قرار می‌دهیم. جهت خم شدن چهار انگشت دست راست جهت خطوط میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

۳ از قانون لنز برای تعیین جهت جریان القاوی استفاده می‌کنیم:

الف) وقتی شار افزایشی است:

میدان القاوی (ثانویه) در جهت مخالف میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با افزایش شار مخالفت کند.

ب) وقتی شار کاهش می‌یابد:

میدان القاوی (ثانویه) هم‌جهت با میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با کاهش شار مخالفت کند.

اصلی B القاوی B'

اصلی B القاوی B'

گام ۱ با توجه به این که جهت خطوط میدان مغناطیسی در خارج از آهنربا، از قطب N به

قطب S است، پس قطب A ، قطب N است.

گام ۲ جهت میدان مغناطیسی القا شده در حلقه را به کمک

قاعده دست راست پیدا می‌کنیم. به این صورت که انگشت شست

دست را بر روی جریان قرار می‌دهیم و جهت خم شدن چهار انگشت،

جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

گام ۳ میدان مغناطیسی القاوی (B')، هم‌جهت با میدان

مغناطیسی آهنربا است؛ بنابراین شار مغناطیسی در حال کاهش است که با دور شدن آهنربا

این اتفاق رخ داده است.

گزینه ۱ - ۶۸

درس نامه جریان القاوی متوسط (I) از تقسیم نیروی محرکه القاوی متوسط ($\mathcal{E}$) به

مقاومت پیچیده یا حلقه (R) به دست می‌آید.

$$I_{av} = \frac{\mathcal{E}_{av}}{R} \Rightarrow I_{av} = \frac{N \Delta \Phi}{R \Delta t} \rightarrow (\text{Wb}) \text{ تغییرات شار} \rightarrow (\text{s}) \text{ مدت زمان}$$

↑
تعداد حلقه‌ها

گزینه ۴ - ۶۵

شفاف سازی وقتی وضعیت کلید از A به B تغییر می‌کند، مقاومت معادل مدار و جریان گذرنده از مولد تغییر می‌کند.

درس نامه ۱ مقاومت معادل دو مقاومت متوالی:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

۲ مقاومت معادل دو مقاومت موازی:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

۳ جریان الکتریکی گذرنده از مولد:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} \rightarrow (V) \text{ نیروی محرکه مولد} \rightarrow (\Omega) \text{ مقاومت درونی مولد}$$

↓
مقاومت معادل مدار (Ω)

گام ۱ وقتی کلید در وضعیت A قرار دارد، مقاومت معادل مدار و جریان‌های I_1 و I_2 را به دست می‌آوریم (شکل الف).

$$R_1 \text{ و } R_2 \text{ موازی} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \times 3}{3 + 3} = 1.5 \Omega$$

$$\Rightarrow R_{eq} = R_{1,2} + R_3 + R_4 = 1.5 + 3 + 3 = 7.5 \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{15}{7.5 + 2.5} = 2 \text{ A}$$

گام ۲ حالا جریان گذرنده از مولد را در این وضعیت محاسبه می‌کنیم.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{15}{7.5 + 2.5} = 2 \text{ A}$$

گام ۳ مقاومت‌های R_1 و R_2 موازی هستند؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow 3 I_1 = 3 I_2 \Rightarrow I_1 = I_2$$

گام ۴ قاعده انشعاب در گره M (شکل الف):

$$I = I_1 + I_2 \xrightarrow{I_1 = I_2} 2 = 2 I_1 \Rightarrow I_1 = 1 \text{ A} \Rightarrow I_2 = 1 \text{ A}$$

گام ۵ وقتی کلید در وضعیت B قرار دارد،

مقاومت معادل مدار و جریان‌های I'_1 و I'_2 را به دست می‌آوریم (شکل ب).

$$R_3 \text{ و } R_4 \text{ موازی} \Rightarrow R_{3,4} = R_3 + R_4 = 3 + 3 = 6 \Omega$$

$$R_1 \text{ و } R_{3,4} \text{ موازی} \Rightarrow R_{1,3,4} = \frac{R_1 \times R_{3,4}}{R_1 + R_{3,4}} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2 \Omega$$

$$R_{eq} = R_{1,3,4} + R_2 = 2 + 3 = 5 \Omega$$

$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{15}{5 + 2.5} = 3 \text{ A}$$

گام ۶ حالا جریان گذرنده از مولد را در وضعیت کلید B محاسبه می‌کنیم.

$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{15}{5 + 2.5} = 3 \text{ A}$$

گام ۷ مقاومت‌های R_1 و $R_{3,4}$ موازی هستند؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$V_1 = V_{3,4} \Rightarrow R_1 I'_1 = R_{3,4} I'_2 \Rightarrow 3 I'_1 = 6 I'_2 \Rightarrow I'_1 = 2 I'_2$$

گام ۸ قاعده انشعاب در گره M' (شکل ب):

$$I' = I'_1 + I'_2 \xrightarrow{I'_1 = 2 I'_2} 3 = 2 I'_2 + I'_2 \Rightarrow 3 = 3 I'_2 \Rightarrow I'_2 = 1 \text{ A}$$

پس در وضعیت B جریان I_1 نسبت به وضعیت A ، دو برابر شده، اما جریان I_2

$$\frac{I'_1}{I_1} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{I'_2}{I_2} = \frac{1}{1} = 1$$

تغییری نکرده است.



مشاوره معمولاً هر سال، حداقل سبک یک سؤال تازه است. سبک این سؤال هم در کنکورهای نظام جدید تازه بود.

گزینه ۲ - ۷۱

با استفاده از رابطه انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{\text{ثابت}} K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\frac{K_2 - K_1 = 4 \text{ J}}{v_1 = 2 \text{ m/s}, v_2 = 6 \text{ m/s}} \rightarrow 4 = \frac{1}{2}m(6^2 - 2^2) \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}m \times 32$$

$$\Rightarrow m = 0.25 \text{ kg} = 250 \text{ g}$$

مشاوره برای حل این سؤال فقط به رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ نیاز دارید؛ پس هیچ مبحثی را حذف نکنید، چون ممکن است سؤال ساده‌ای مثل این سؤال را از دست بدهید.

گزینه ۳ - ۷۲

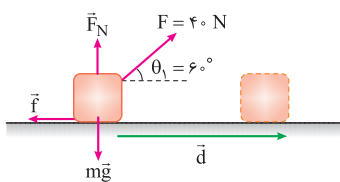
درس‌نامه ۱ قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی معین برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است.

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

(m/s) تندی اولیه
(kg) جرم
(m/s) تندی نهایی

$$W = F d \cos \theta \rightarrow \text{زاویه بین نیرو و جابه‌جایی}$$

(N) نیرو
(m) جابه‌جایی



مطابق شکل روبه‌رو، چهار نیرو به جسم وارد می‌شود. دو نیروی وزن و نیروی عمودی سطح چون بر جابه‌جایی عمودند، پس کاری انجام نمی‌دهند و فقط دو نیروی F و نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهند. با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_F + W_f = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow Fd \cos \theta_1 + fd \cos \theta_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow 40 \times 5 \times \cos 60^\circ + f \times 5 \times \cos 180^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times (2^2 - 0^2) \Rightarrow 100 - 5f = 25$$

$$\Rightarrow 5f = 75 \Rightarrow f = 15 \text{ N}$$

گزینه ۴ - ۷۳

درس‌نامه ۱ با توجه به معادله حالت گاز کامل ($PV = nRT$)، برای مقایسه دو حالت مختلف، رابطه کلی زیر را در نظر بگیرید و هر کمیتی را که در سؤال ثابت فرض شده بود، از طرفین این رابطه حذف کنید.

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

حجم
فشار
تعداد مول
دما (K)

$$P = \rho g h$$

شتاب گرانش (m/s^2)
چگالی مایع (kg/m^3)

گام ۱ با توجه به قانون گازهای آرمانی، فشار هوای محبوس را در حالت دوم (حالتی که طول استوانه تلمبه به 40 cm رسیده است) محاسبه می‌کنیم (حواستون باشد که راه‌های ورودی و خروجی هوای استوانه تلمبه بسته است؛ پس تعداد مول گاز ثابت می‌ماند):

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2 \xrightarrow{V = Ah} P_1 (A h_1) = P_2 (A h_2)$$

$$\Rightarrow P_1 h_1 = P_2 h_2 \Rightarrow 10^5 \times 34 = P_2 \times 40 \Rightarrow P_2 = 8.5 \times 10^4 \text{ Pa}$$

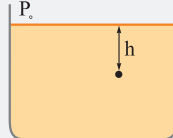
با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، جریان القایی متوسط را به دست می‌آوریم.

$$I_{av} = -\frac{N \Delta \Phi}{R \Delta t} = -\frac{200}{15} \times \frac{(5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3})}{0.1} = \frac{200 \times 15 \times 10^{-3}}{15 \times 10^{-1}} = 2 \text{ A}$$

تله ۴ نیروی محرکه القایی متوسط ($\mathcal{E}_{av}$) است، نه جریان القایی متوسط!

گزینه ۴ - ۶۹

درس‌نامه ۱ فشار کل در عمق h از سطح آزاد مایع:



$$P = \rho g h + P_0 \rightarrow \text{فشار هوا (Pa)}$$

عمق (m)
چگالی مایع (kg/m^3)
شتاب گرانش (m/s^2)

۲ فشار پیمانه‌ای (P_g): اختلاف فشار مطلق و فشار جو.

$$P_g = P - P_0 \rightarrow \text{فشار جو}$$

فشار مطلق
فشار پیمانه‌ای

روش گام ۱ با توجه به نمودار، فشار در عمق صفر یعنی فشار هوا برابر $1.03 \times 10^5 \text{ Pa}$ و فشار در عمق 50 cm برابر $1.71 \times 10^5 \text{ Pa}$ است؛ بنابراین چگالی مایع را با استفاده از رابطه زیر می‌توانیم به دست بیاوریم.

$$P = \rho g h + P_0 \Rightarrow 1.71 \times 10^5 = \rho \times 10 \times (0.5) + 1.03 \times 10^5$$

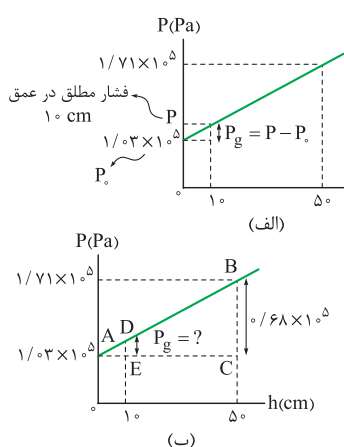
$$\Rightarrow \Delta P = 6.8 \times 10^4 \Rightarrow \rho = 1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$$

گام ۲ فشار پیمانه‌ای مایع (اختلاف فشار مطلق مایع و فشار هوا) در عمق 10 cm برابر است با:

$$P_g = P - P_0 \xrightarrow{P - P_0 = \rho g h} P_g = 1.36 \times 10^4 \times 10 \times 0.1 = 1.36 \times 10^4 \text{ Pa}$$

روش گام ۲ فشار پیمانه‌ای مایع در عمق 10 cm را در شکل مشخص می‌کنیم (شکل الف).

گام ۳ به کمک تشابه دو مثلث ABC و ADE، فشار پیمانه‌ای در عمق 10 cm را به دست می‌آوریم (شکل ب).



$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{P_g}{10} = \frac{6.8 \times 10^4}{50}$$

$$\Rightarrow P_g = 1.36 \times 10^4 \text{ Pa}$$

تیزبازی از روی نمودار، فشار پیمانه‌ای در عمق 50 cm را به دست می‌آوریم.

$$P_g = P - P_0 = 1.71 \times 10^5 - 1.03 \times 10^5 = 6.8 \times 10^4 \text{ Pa}$$

فشار پیمانه‌ای در عمق 10 cm کم‌تر از $6.8 \times 10^4 \text{ Pa}$ است و با توجه به گزینه‌ها فقط می‌تواند درست باشد.

گزینه ۱ - ۷۰

گام ۱ نیرویی که ظرف به سطح افقی وارد می‌کند، برابر با مجموع وزن ظرف و وزن مایع درون آن است. با اضافه‌شدن قطره آبی به وزن W_1 ، وزن مایع به اندازه W_1 افزایش می‌یابد؛ بنابراین نیروی واردشده از طرف ظرف به سطح افقی به اندازه W_1 افزایش می‌یابد. (۳ و ۴ تیرا!)

گام ۲ تغییر فشار ناشی از اضافه‌شدن هر قطره آب، در سطح مایع و کف ظرف برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta P_{\text{سطح}} = \Delta P_{\text{کف}} \Rightarrow \frac{\Delta F_{\text{سطح}}}{A_{\text{سطح}}} = \frac{\Delta F_{\text{کف}}}{A_{\text{کف}}} \Rightarrow \frac{W_1}{2} = \frac{\Delta F_{\text{کف}}}{10 \times 10^{-2}} \Rightarrow \Delta F_{\text{کف}} = 50 W_1$$

بنابراین نیرویی که آب به کف ظرف وارد می‌کند، به اندازه $50 W_1$ افزایش می‌یابد.



با توجه به نکته قبل، نسبت انرژی درونی گاز را در حالت B به A و حالت B به C به دست می‌آوریم.

$$\frac{U_B}{U_A} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{P_B V_B}{P_A V_A} = \frac{2/5 \times 10^5 \times 6/6}{2/5 \times 10^5 \times 2/2} = 3 \Rightarrow U_B = 3U_A$$

$$\frac{U_B}{U_C} = \frac{T_B}{T_C} = \frac{P_B V_B}{P_C V_C} = \frac{2/5 \times 10^5 \times 6/6}{1/5 \times 10^5 \times 6/6} = \frac{2/5}{1/5} = 2 \Rightarrow U_B = \frac{2}{3} U_C$$

در آخر، انرژی درونی نقطه‌های A، B و C را نسبت به یکدیگر می‌نویسیم.

$$U_B = 3U_A = \frac{2}{3} U_C$$

شیمی

۷۶- گزینه ۱

شفاف‌سازی تمایل به گرفتن یا به اشتراک گذاشتن الکترون، از ویژگی‌های شیمیایی نافلزهاست، بنابراین سؤال داره به زبون بی‌زبونی! می‌گه که کدام عدد اتمی مربوط به یک نافلز است.

درس‌نامه مقایسه کلی رفتار شیمیایی فلزها، نافلزها و شبه‌فلزها:

عنصر	رفتار شیمیایی
فلز	اغلب فلزها، تمایل به از دست دادن الکترون (تشکیل کاتیون) دارند.
نافلز	تمایل به گرفتن (تشکیل آنیون) یا به اشتراک گذاشتن الکترون (تشکیل مواد مولکولی یا کووالانسی) دارند.
شبه‌فلز	تمایل به اشتراک گذاشتن الکترون (تشکیل مواد مولکولی یا کووالانسی) دارند.

فب! بین عددهای اتمی داده‌شده عدد ۱۶ مربوط به نافلز گوگرد (S) است.

عدهای اتمی ۱۹ و ۳۷ که یک واحد از عدد اتمی گاز نجیب بیشتر است، مربوط به فلزهای گروه اول و به ترتیب پتاسیم و روبیدیم و عدد اتمی ۳۱ مربوط به فلز گروه ۱۳ از دوره چهارم یعنی گالیوم (Ga) است.

مشاوره شما باید عناصر ۴ دوره اول جدول (۳۶ عنصر جدول) رو به خوبی بشناسین و به عدد اتمی، موقعیت اون‌ها در جدول تناوبی و ویژگی‌هاشون تسلط کامل داشته باشید. برای این کار هم حتماً باید از عدد اتمی گازهای نجیب کمک بگیرید.

۷۷- گزینه ۳

به جز عبارت اول، بقیه عبارت‌ها درست‌اند. اورانیم، معروف‌ترین عنصر پرتوزای طبیعی (نه ساختگی!) است. از ایزوتوپ ^{235}U اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی استفاده می‌شود، اما فراوانی این ایزوتوپ در مخلوط طبیعی ایزوتوپ‌های اورانیم کم (کمتر از ۷٪ درصد) است، به همین دلیل فرایند غنی‌سازی ایزوتوبی به منظور افزایش مقدار فراوانی این ایزوتوپ انجام می‌شود. بررسی عبارت نادرست: فراوانی اورانیم ^{235}U ، در مخلوط طبیعی ایزوتوپ‌های آن، کمتر از ۷٪ درصد است؛ بنابراین ^{235}U فراوان‌ترین ایزوتوپ اورانیم نیست.

۷۸- گزینه ۲

عبارت‌های دوم، سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: عنصر M در دوره ۴ و گروه ۱۰ جدول تناوبی جای دارد.

$$^{38}\text{M} : [^{18}\text{Ar}] 3d^4 4s^2 \Rightarrow \text{گروه ۴، دوره ۴}$$

تیزبازی در عناصر واسطه (دسته d) دوره چهارم به غیر از Zn، مجموع رقم‌های عدد اتمی عنصر، شماره گروه را مشخص می‌کند. برای مثال در ^{28}M (همان ^{28}Ni)، مجموع رقم‌های عدد اتمی برابر $10 = 2 + 8$ است؛ در نتیجه ^{28}M ، در گروه ۱۰ جدول تناوبی جای دارد.

نکته جدول زیر مقدار عدد کوانتومی فرعی را برای زیرلایه‌های گوناگون نشان می‌دهد:

نوع زیرلایه	s	p	d	f
مقدار l	۰	۱	۲	۳

گام ۳ فشار هوای محبوس را برحسب سانتی‌متر جیوه به دست می‌آوریم.

$$P_1 = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} \Rightarrow 8/5 \times 10^4 = 13/6 \times 10^3 \times 10 \times h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{8/5 \times 10^4}{13/6 \times 10^3} = \frac{8/5}{13/6} = \frac{48}{13} \text{ m} = 62/5 \text{ cm}$$

$$P_2(\text{cmHg}) = h_{\text{جیوه}}(\text{cm}) = 62/5 \text{ cmHg}$$

۷۴- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ قانون اول ترمودینامیک:

تغییر انرژی درونی گاز

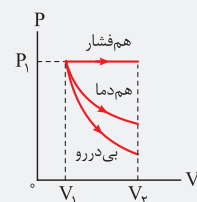
$$\Delta U = Q + W$$

گرمای کار محیط بر روی دستگاه

$$U \propto T$$

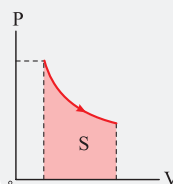
انرژی درونی گاز آرمانی فقط تابع دمای گاز است.

۲ نمودار P-V برای سه فرایند انبساطی هم‌فشار، هم‌دما و بی‌دررو:



۳ مساحت زیر نمودار P-V برابر با قدرمطلق کار انجام‌شده است.

$$S = |W|$$



نمودار P-V این سه فرایند مطابق شکل مقابل است. با توجه به شکل، مساحت زیر نمودار فرایند هم‌فشار بیشتر از مساحت سطح زیر نمودار فرایند هم‌دما است؛ بنابراین:

$$|W_{\text{هم‌فشار}}| > |W_{\text{هم‌دما}}|$$

هم‌چنین طبق رابطه $PV = nRT$ ، در فرایند هم‌فشار با افزایش حجم، دما نیز افزایش می‌یابد؛ بنابراین انرژی درونی

گاز نیز افزایش می‌یابد. از طرفی در فرایند هم‌دما، تغییر انرژی درونی گاز برابر با صفر است. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \Delta U_{\text{هم‌فشار}} > 0 \Rightarrow Q_{\text{هم‌فشار}} > |W_{\text{هم‌فشار}}| \\ \Delta U_{\text{هم‌دما}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{هم‌دما}} = |W_{\text{هم‌دما}}| \end{cases} \xrightarrow{|W_{\text{هم‌فشار}}| > |W_{\text{هم‌دما}}|} Q_{\text{هم‌فشار}} > Q_{\text{هم‌دما}}$$

در فرایند بی‌دررو، $Q_{\text{بی‌دررو}} = 0$ ؛ پس می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$Q_{\text{هم‌فشار}} > Q_{\text{هم‌دما}} > Q_{\text{بی‌دررو}}$$

بنابراین تا این‌جا فهمیدیم که گرمای داده‌شده به گاز در فرایند هم‌فشار بیشتر از دو فرایند دیگر است (درستی الف)، انرژی درونی گاز در فرایند هم‌فشار افزایش می‌یابد (نادرستی ت) و گرمای داده‌شده به گاز در فرایند هم‌دما برابر با صفر نیست (نادرستی ب)؛ پس عبارت (پ) باید درست باشد، ولی ما دلیل آن را هم می‌گوییم:

$$\Delta U_{\text{بی‌دررو}} = W \xrightarrow{\text{فرایند انبساطی}} \Delta U_{\text{بی‌دررو}} < 0$$

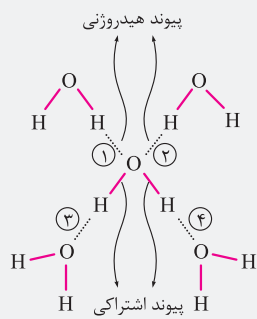
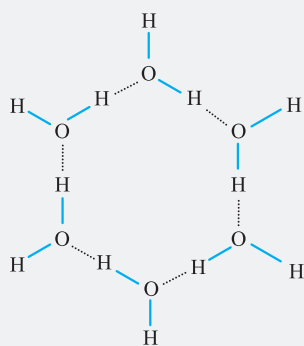
از قبل دیدیم که $\Delta U_{\text{هم‌فشار}} > 0$ و $\Delta U_{\text{هم‌دما}} = 0$ ؛ پس انرژی درونی فقط در فرایند بی‌دررو کاهش یافته است.

۷۵- گزینه ۴

ابتدا نکته زیر را بخوانید.

نکته انرژی درونی گاز آرمانی متناسب با دمای مطلق (T) و دمای مطلق طبق معادله حالت گاز کامل ($PV = nRT$) متناسب با حاصل‌ضرب فشار در حجم گاز است.

$$U \propto T \propto PV$$



به دلیل وجود فضاهای خالی در ساختار یخ، برخلاف دیگر مواد، حجم آب هنگام انجماد افزایش می‌یابد. با توجه به ثابت بودن جرم آب و افزایش حجم آن به هنگام یخ‌زدن، چگالی یخ صفر درجه نسبت به آب مایع صفر درجه، کمتر است.

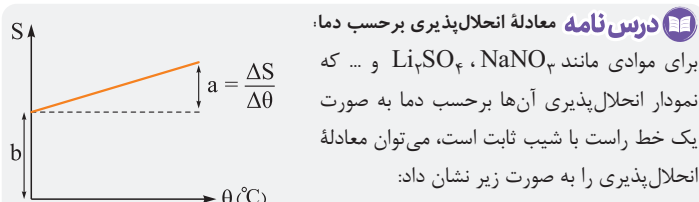
عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست: عبارت سوم: دقت کنید که پیوندهای اشتراکی، مربوط به اتم‌های موجود در یک مولکول است و دو مولکول نمی‌توانند با هم پیوند اشتراکی داشته باشند. مولکول‌های آب با جاذبه‌های بین مولکولی از نوع پیوند هیدروژنی به هم متصل‌اند.

عبارت پنجم: در حالت مایع، با این‌که مولکول‌های آب با یکدیگر پیوند هیدروژنی قوی دارند، اما روی هم می‌لغزند و جابه‌جا می‌شوند؛ بنابراین مولکول‌ها در جایگاه ثابتی قرار ندارند.

۸۱- گزینه ۱

نکته استراتژی اول با توجه به اطلاعات داده‌شده، انحلال‌پذیری نمک (بیشترین مقدار نمک که در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود) را در دماهای ۷۵ °C و ۵۰ °C به دست بیار (در واقع با این کار مختصات دو نقطه (θ_1, S_1) و (θ_2, S_2) رو خواهی داشت) حالا با توجه به این‌که نمودار انحلال‌پذیری این نمک به صورت خطی است، خیلی راحت با داشتن مختصات این دو نقطه، شیب خط (شیب معادله انحلال‌پذیری نمک برحسب دما) را محاسبه کن.



$$y = ax + b$$

معادله کلی خط راست

شیب خط

$$S = a\theta + b$$

معادله انحلال‌پذیری برحسب دما

عرض از مبدأ انحلال‌پذیری

$$a = \frac{\Delta S}{\Delta \theta} = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1}$$

شیب خط

همان‌طور که در درس ریاضی خوانده‌اید، اگر دو نقطه از یک خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله خط را به صورت زیر نشان دهیم:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$S - S_1 = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1} (\theta - \theta_1)$$

معادله انحلال‌پذیری برحسب دما

a (شیب خط)

$$\left(\theta_1, S_1 \right) \text{ : نقطه اول}$$

$$\left(\theta_2, S_2 \right) \text{ : نقطه دوم}$$

گام ۱ محاسبه انحلال‌پذیری در دمای ۷۵ °C:

در ۷۵ گرم محلول سیرشده در این دما، ۲۵ گرم نمک و ۵۰ گرم آب وجود دارد؛ یعنی در ۵۰ گرم آب، ۲۵ گرم نمک حل شده است. انحلال‌پذیری مقدار گرم حل‌شونده به ازای ۱۰۰ گرم آب را نشان می‌دهد:

$$S(75^\circ\text{C}) = 2 \times 25 = 50$$

♦ اعداد کوانتومی $l = 0$ و $n = 4$ مربوط به زیرلایه ۴s هستند؛ با توجه به آرایش الکترونی اتم‌های داده‌شده، در هر سه اتم، ۲ الکترون در زیرلایه ۴s وجود دارد.

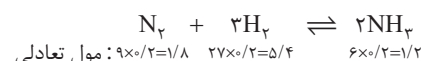
♦ اتم X با گرفتن دو الکترون و تشکیل آنیون دو بار منفی، به آرایش گاز نجیب کریپتون $([\text{Ar}] 3d^1 4s^2 4p^6)$ می‌رسد. در گازهای نجیب، همه زیرلایه‌های اشغال‌شده، به طور کامل پر هستند.

♦ عدد کوانتومی $l = 2$ مربوط به زیرلایه‌های d است. با توجه به آرایش‌های الکترونی نوشته‌شده، در هر سه اتم فقط زیرلایه ۳d از الکترون اشغال شده است و در این زیرلایه، در اتم‌های A و M به ترتیب ۷ و ۸ الکترون وجود دارد.

♦ ایزوتوپ‌ها، عدد اتمی یکسانی دارند. عدد اتمی اتم‌های ${}^{27}_{18}\text{M}$ و ${}^{27}_{18}\text{A}$ که یکسان نیست. $({}^{27}_{18}\text{M}$ و ${}^{27}_{18}\text{A})$ هر دو جزء فلزهای دسته d هستند و می‌توانند با اکسیژن، ترکیب یونی تشکیل دهند.

۷۹- گزینه ۳

در شکل داده‌شده، مولکول‌های دواتمی کوچک‌تر، گاز هیدروژن (۲۷ ذره)، مولکول‌های دواتمی بزرگ‌تر، گاز نیتروژن (۹ ذره) و مولکول‌های چهاراتمی، همان گاز آمونیاک (۶ ذره) هستند.



بررسی گزینه‌ها: ۱ با توجه به معادله واکنش، برای تولید ۱/۲ مول آمونیاک، به ۰/۶ مول گاز نیتروژن نیاز است. (ضریب N_2 ، نصف آمونیاک است.)

$$\frac{1}{2} \text{ mol NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol N}_2}{2 \text{ mol NH}_3} = 0.6 \text{ mol N}_2$$

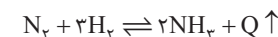
$$\text{N}_2 = \text{مول مصرف‌شده N}_2 + \text{مول تعادلی N}_2 = 0.6 + 1/8 = 2/4$$

۲ با توجه به معادله واکنش، برای تولید ۱/۲ مول آمونیاک، به ۱/۸ مول $\frac{3}{2} \times 1/2 = 1/8$ گاز هیدروژن نیاز است:

$$\frac{1}{2} \text{ mol NH}_3 \times \frac{3 \text{ mol H}_2}{2 \text{ mol NH}_3} = 1/8 \text{ mol H}_2$$

$$\text{H}_2 = \text{مول مصرف‌شده H}_2 + \text{مول تعادلی H}_2 = 5/4 + 1/8 = 7/2$$

۳ با استفاده از مول آغازی N_2 یا H_2 می‌توان شمار مول‌های آمونیاک تولیدی با فرض کامل بودن واکنش را حساب کرد. اگر واکنش برگشت‌ناپذیر باشد، به ازای مصرف کامل ۲/۴ مول گاز نیتروژن، ۴/۸ مول آمونیاک تولید خواهد شد. ۴ واکنش مورد نظر گرماده است؛ بنابراین با افزایش دما، طبق اصل لوشاتلیه تعادل در جهت برگشت جابه‌جا خواهد شد و شمار مول‌های آمونیاک از ۱/۲ مول نیز کمتر خواهد شد.



جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت و مصرف گرما

۸۰- گزینه ۲

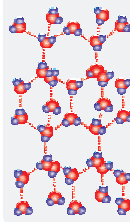
درس‌نامه بررسی آب در سه حالت جامد، مایع و گاز:



۱ در حالت گاز یا بخار، فاصله بین مولکول‌های H_2O بسیار زیاد بوده و مولکول‌ها عملاً از هم جدا هستند، گویی میان آن‌ها پیوندهای هیدروژنی وجود ندارد.



۲ در حالت مایع، فاصله بین مولکول‌های H_2O در مقایسه با حالت گاز بسیار کمتر است. در این حالت، مولکول‌ها پیوندهای هیدروژنی قوی دارند؛ با این وجود روی هم می‌لغزند و جابه‌جا می‌شوند.



۳ در حالت جامد، مولکول‌های آب در جاهای به نسبت ثابت قرار دارند و هر مولکول آب می‌تواند با چهار مولکول مجاور خود، پیوند هیدروژنی تشکیل دهد. با تشکیل پیوندهای هیدروژنی میان مولکول‌های آب در حالت جامد، شبکه‌ای با حلقه‌های شش‌ضلعی ایجاد می‌شود که داخل آن فضاهای خالی وجود دارد و اتم‌های اکسیژن در رأس این حلقه‌ها قرار دارند.



گام ۳ محاسبه انحلال پذیری در دمای °C:

در ۵۰ گرم محلول سیر شده در این دما، ۱۳/۵ گرم نمک و ۲۶/۵ = ۱۳/۵ - ۵۰ گرم آب وجود دارد.

$$\text{نمک } ۳۷ \text{ g} = \frac{۱۳/۵ \text{ g نمک}}{۳۶/۵ \text{ g آب}} \times ۱۰۰ \text{ g آب}$$

خب! از اون جایی که نمک مورد نظر در دمای بالاتر (۷۵ °C)، انحلال پذیری بیشتری دارد، نمودار انحلال پذیری نمک بر حسب دما، صعودی است و شیب معادله انحلال پذیری مثبت است. پس تا این جا ۲ و ۴ پُر!

گام ۴ شیب معادله انحلال پذیری نمک را محاسبه می کنیم:

$$(\theta_1 = 0, S_1 = 37)(\theta_2 = 75, S_2 = 50)$$

$$\text{شیب معادله خط} = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{50 - 37}{75 - 0} = \frac{13}{75} = 0/17$$

۸۲ - گزینه ۴

همه عبارت های داده شده، درست اند.

بررسی عبارت ها: در مولکول HCN، اتم هیدروژن که نمی تواند اتم مرکزی باشد؛ بنابراین عنصر بعد از هیدروژن، یعنی کربن، اتم مرکزی است: $H-C \equiv N$

در فصل ۲ کتاب درسی شیمی ۱ می خوانیم که برخی آلاینده های هوا مانند $NO_2(g)$ و $SO_2(g)$ که اکسیدهای اسیدی هستند، می توانند با آب و اکسیژن موجود در هوا واکنش دهند و در نهایت به اسیدهای قوی HNO_3 (نیتریک اسید) و H_2SO_4 (سولفوریک اسید) تبدیل شوند، بنابراین با توجه به تشکیل باران اسیدی، در واکنش تشکیل این اسیدها، مواد گازی شکل شرکت دارند.

در شرایط خاص، واکنش اکسیژن با برخی فلزها (مانند منیزیم) و نافلزها (مانند گوگرد) می تواند از نوع سوختن باشد، یعنی با آزاد شدن نور و گرما همراه است.

درسته، زیرا نیتروژن نسبت به اکسیژن واکنش پذیری کمتری دارد و به جو بی اثر مشهور است.

۸۳ - گزینه ۱

استراتژی برای حل سؤال با روش کسر تناسب، کافیست که برای FeS ، کسر مربوط به جرم به همراه درصد خلوص، برای گاز H_2S ، کسر مربوط به حجم گازها در شرایط STP و برای $FeCl_3$ هم، کسر مربوط به جرم را بنویسی و سؤال رو حل کنی. اگر هم از روش کسر تبدیل استفاده می کنی، اول باید به کمک حجم گاز H_2S تولید شده، جرم خالص FeS و بعد درصد خلوص FeS رو حساب کنی، برای قسمت دوم سؤال هم از روی حجم H_2S تولید شده، به جرم $FeCl_3$ تولیدی برسی.



روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{۱۰۰} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم (mL)}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{3/15 \times \frac{x}{100}}{1 \times 88} = \frac{y}{1 \times 127} = \frac{448}{22400 \times 100}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{88 \times 2}{3/15} = \frac{176}{3/15} \\ \text{با توجه به گزینه ها} \rightarrow \frac{176}{3/15} < 60 \Rightarrow x = 56 \\ y = \frac{127 \times 2}{100} = 2/54 \text{ g FeCl}_2 \end{cases}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

ابتدا مقدار خالص FeS را محاسبه می کنیم:

$$? \text{ g FeS} = 448 \text{ mL } H_2S \times \frac{1 \text{ mol } H_2S}{22400 \text{ mL } H_2S} \times \frac{1 \text{ mol FeS}}{1 \text{ mol } H_2S} \times \frac{88 \text{ g FeS}}{1 \text{ mol FeS}} = 1/76 \text{ g FeS}$$

گام ۴ اکنون می توان درصد خلوص FeS را محاسبه کرد:

$$\text{با توجه به گزینه ها} \rightarrow \frac{176}{3/15} < 60 \Rightarrow \text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم ماده خالص}}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times 100 = \frac{176}{3/15} \times 100 = \frac{176}{3/15} \times 100 = 189/176 > 176$$

$$= \frac{176}{3/15} < 60 \Rightarrow \text{با توجه به گزینه ها، درصد خلوص ۵۶ درصد است.}$$

گام ۵ به دست آوردن جرم $FeCl_2$:

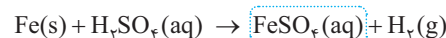
$$? \text{ g FeCl}_2 = 448 \text{ mL } H_2S \times \frac{1 \text{ mol } H_2S}{22400 \text{ mL } H_2S} \times \frac{1 \text{ mol FeCl}_2}{1 \text{ mol } H_2S} \times \frac{127 \text{ g FeCl}_2}{1 \text{ mol FeCl}_2} = 2/54 \text{ g FeCl}_2$$

۸۴ - گزینه ۳

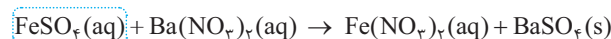
فلزهای قلیایی خاکی در گروه ۲ جدول تناوبی جای دارند و با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی، واکنش پذیری و بار مثبت در هسته اتم آنها، افزایش می یابند. همه عنصرهای این گروه، دارای ۲ الکترون ظرفیتی هستند.

۸۵ - گزینه ۱

با توجه به اطلاعات داده شده در سؤال از واکنش فلز آهن با سولفوریک اسید، آهن (II) سولفات و گاز هیدروژن مطابق معادله زیر تولید می شود:

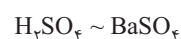


نمک تولید شده در این واکنش؛ یعنی $FeSO_4$ مطابق معادله زیر با باریم نیترات واکنش می دهد:



روش استفاده از کسر تناسب:

با توجه به این که ضریب $FeSO_4$ در هر دو معادله یکسان است، می توانیم به طور مستقیم، بین سولفوریک اسید و باریم سولفات، تناسب برقرار کنیم. فقط موازنه باشد که بازده درصدی را باید در کسر مربوط به واکنش دهنده اولیه، یعنی سولفوریک اسید ضرب کنیم:



$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{۱۰۰} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{0/04 \times 62/5}{100} = \frac{x}{1 \times 233}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \times 62/5 \times 233}{100 \times 100} = \frac{250 \times 233}{100 \times 100} = \frac{233}{40} = \frac{200}{40} + \frac{30}{40} + \frac{3}{40}$$

$$= 5 + 0/75 + 0/075 = 5/825 \text{ g BaSO}_4$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

ابتدا به کمک معادله واکنش اول، تعداد مول $FeSO_4$ تولید شده را حساب می کنیم:

$$0/04 \text{ mol } H_2SO_4 \times \frac{1 \text{ mol FeSO}_4}{1 \text{ mol } H_2SO_4} = 0/04 \text{ mol FeSO}_4$$

گام ۵ حالا به کمک معادله واکنش دوم، از مول $FeSO_4$ به جرم $BaSO_4$ می رسمیم:

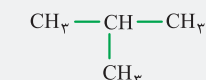
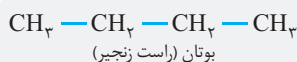
نکته در مسائلی که بازده درصدی واکنش جزء اطلاعات سؤال است، به جای استفاده از فرمول بازده، می توان از کسر تبدیل معادل آن استفاده کرده و مقدار عملی و نظری را به یکدیگر تبدیل کرد. مثلاً می توان نوشت:

$$\frac{\text{نظری } 100 \text{ g عملی}}{\text{عملی } 100 \text{ g نظری}} = a \Rightarrow \text{بازده درصدی}$$

$$0/04 \text{ mol FeSO}_4 \times \frac{1 \text{ mol BaSO}_4}{1 \text{ mol FeSO}_4} \times \frac{233 \text{ g BaSO}_4}{1 \text{ mol BaSO}_4}$$

$$\times \frac{62/5 \text{ g BaSO}_4 \text{ عملی}}{100 \text{ g BaSO}_4 \text{ نظری}} = 5/825 \text{ g BaSO}_4$$

کسر مربوط به بازده درصدی

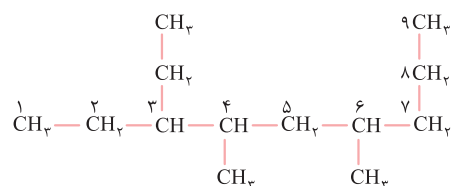


۲- متیل پروپان (متیل پروپان)

آلکان‌ها، هیدروکربن‌هایی سیرشده با فرمول عمومی $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$ هستند و بنابراین جرم مولی آن‌ها $14n + 2 = 12n + 2n + 2$ گرم بر مول است. در آلکان داده‌شده، ۱۳ اتم کربن وجود دارد؛ بنابراین جرم مولی آن برابر $(14 \times 13) + 2 = 184 \text{ g.mol}^{-1}$ است.

ایزومرها یا هم‌پارها، ترکیب‌هایی هستند که فرمول مولکولی یکسان ولی فرمول ساختاری متفاوت دارند؛ بنابراین همه هم‌پارهای این آلکان، ۱۳ کربنه بوده و جرم مولی آن‌ها ۱۸۴ گرم بر مول است.

حالا اگر خواستید نام ترکیب رو ببینید این پوری می‌شه:



۳- اتیل - ۴ و ۶-دی‌متیل نونان



۸۸- گزینه ۳

با توجه به رابطه $Q = mc\Delta\theta$ خواهیم داشت:

$$18/2 \text{ kJ} = 1 \text{ kg} \times c \times (35 - 15)^\circ\text{C} \Rightarrow c = \frac{18/2}{2} = 0/91 \text{ J.g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$$



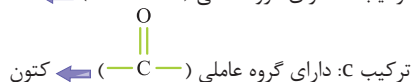
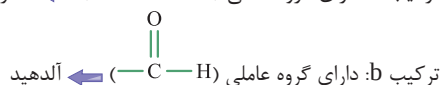
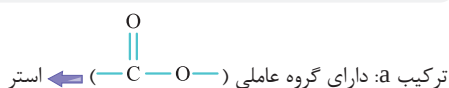
۸۹- گزینه ۲

درس‌نامه (a) نام گروه‌های عاملی اکسیژن‌دار در جدول زیر آورده شده است:

نام گروه عاملی (خانواده)	ساختار
آلدهیدی	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ -\text{C}-\text{H} \end{array}$
کربونیل (کتونی)	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ -\text{C}- \end{array}$
هیدروکسیل (الکلی)	$-\text{OH}$
اتری	$-\text{O}-$
کربوکسیل (اسیدی)	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ -\text{C}-\text{OH} \end{array}$
استری	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ -\text{C}-\text{O}- \end{array}$

(b) در شمار اتم کربن یکسان، به شرطی که گروه هیدروکربنی متصل به گروه‌های عاملی، سیرشده و غیرحلقوی باشند، گونه‌های زیر با هم ایزومر (هم‌پار) هستند:

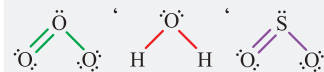
۱- آلدهیدها و کتون‌های یک‌عاملی ← فرمول عمومی: $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}$ ۲- اترها و الکل‌های یک‌عاملی ← فرمول عمومی: $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}\text{O}$ ۳- کربوکسیلیک اسیدها و استرهای یک‌عاملی ← فرمول عمومی: $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$



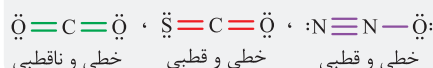
۹۶- گزینه ۳

درس‌نامه مولکول‌های سه‌اتمی می‌توانند به ۴ فرم A_3 (مثل O_3)، AB_3 (مثل CO_2 ،

۱- اگر اتم مرکزی در مولکول‌های سه‌اتمی، دارای الکترون ناپیوندی باشد، مولکول قطبی بوده و شکل آن خمیده (V شکل) است. مولکول‌هایی مانند H_2O ، SO_2 ، O_3 و ... دارای این شرایط هستند.



۲- اگر اتم مرکزی در مولکول سه‌اتمی، فاقد الکترون ناپیوندی باشد، به شکل خطی دیده می‌شود. در این صورت اگر اتم‌های جانبی یکسان باشند (مثل CO_2) ناقطبی و اگر اتم‌های جانبی متفاوت باشند (مثل SCO یا N_2O) مولکول قطبی است.



به‌جز عبارت سوم، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

♦ از آن‌جا که مولکول AD_3 ساختار خطی دارد؛ پس اتم مرکزی آن، فاقد الکترون ناپیوندی بوده و با توجه به یکسان بودن اتم‌های جانبی، مولکولی ناقطبی بوده و گشتاور دوقطبی آن برابر با صفر است. ساختار مولکول AD_3 به صورت مقابل است: $\text{D}=\text{A}=\text{D}$

♦ AD_3 می‌تواند همان CO_2 باشد. اتم‌های کربن و اکسیژن هر دو در دوره دوم قرار دارند. ♦ متأسفانه نکته قسمت اول این عبارت خارج از کتاب درسی است. برخی فلزها می‌توانند با اتم‌های نافلزی، مولکول خطی به فرم AD_3 تشکیل دهند؛ مثلاً BeCl_2 یک مولکول با ساختار خطی است. (اتم مرکزی در این مولکول، از قاعده هشت‌تایی پیروی نمی‌کند).



ولی با قسمت دوم هم می‌شد این عبارت رو رد کرد. ساختار مولکول CS_2 خطی است، ولی شعاع اتمی C از S کوچک‌تر است.

تله اگه فقط ساختار CO_2 رو تو ذهنت داشته باشی، حتماً تو این عبارت دچار اشتباه می‌شی. در این موارد برای بررسی درستی یا نادرستی عبارت، باید دنبال مثال‌هایی از کتاب درسی باشی که بتونی باهاش عبارت رو نقض کنی، اگر یک مورد رو هم پیدا کردی، عبارت غلطه ولی اگر از مثال‌های کتاب درسی مورد نقض‌کننده‌ای رو پیدا نکردی، می‌تونی عبارت رو درست در نظر بگیری.

♦ مثلاً در مولکول CO_2 ، اتم‌های اکسیژن جفت‌الکترون ناپیوندی دارند. ساختار لوویس مولکول CO_2 به صورت زیر است:



۸۷- گزینه ۲

نکته برای نام‌گذاری آلکان‌های شاخه‌دار:

۱- زنجیری که بیشترین تعداد اتم‌های کربن را داشته باشد، به عنوان زنجیر اصلی انتخاب می‌کنیم. ۲- شماره‌گذاری در زنجیر اصلی را از سمتی انجام می‌دهیم که زودتر به اولین شاخه فرعی برسیم.

بخش اول سؤال:

روش زنجیر اصلی آلکان داده‌شده، ۹ کربنی است و نام آن باید به نونان ختم شود، پس فعلاً ۳ و ۴ پُر!

روش شاخه فرعی متیل، روی کربن شماره ۱ و شاخه فرعی اتیل روی کربن شماره ۱ و ۲ نمی‌تواند قرار بگیرد؛ یعنی ۱- متیل، ۱- اتیل و ۲- اتیل رو هیچ‌گاه در آلکان‌ها نخواهیم داشت. پس ۳ و ۴ بدون این‌که کربن‌های زنجیر اصلی رو شمارش کنیم، پُر!

بخش دوم سؤال:

نکته به ترکیب‌هایی که فرمول مولکولی یکسانی دارند، اما ساختار آن‌ها با یکدیگر تفاوت دارد، ایزومر یا هم‌پار می‌گویند. به طور مثال مولکول‌های بوتان و ۲- متیل پروپان با یکدیگر ایزومرنند؛ زیرا با این‌که فرمول مولکولی هر دو به صورت C_4H_{10} است، اما فرمول ساختاری آن‌ها با هم کاملاً متفاوت می‌باشد.

ሂሊ



$$\Rightarrow M = \frac{10^{-2} + 2 \times 10^{-3}}{2} = \frac{(10 \times 10^{-3}) + (2 \times 10^{-3})}{2} = 6 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{M(HA)}{M(HNO_3)} = \frac{6 \times 10^{-3}}{10^{-3}} = 6$$

۹۷- گزینه ۴

شوینده‌های خورنده در واکنش با رسوب‌ها، فراورده‌های محلول در آب یا گازی تولید می‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی SO_3Na -  حلقه بنزنی و در

نتیجه پیوندهای $C=C$ وجود دارد؛ از این رو سیر نشده به حساب می‌آیند.

۲) نمک‌های فسفات به منظور افزایش قدرت پاک‌کنندگی به شوینده‌ها اضافه می‌شود.

صابون‌های کلردار هستند که خاصیت ضد عفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی دارند.

۳)

نکته

عملکرد پاک‌کننده‌ها: صابونی و غیرصابونی ← فقط برهم‌کنش بین ذره‌ها
خورنده ← هم برهم‌کنش بین ذره‌ها و هم واکنش با آلاینده‌ها

۴) **تله** پاک‌کننده‌های صابونی تنها براساس برهم‌کنش بین ذره‌ها عمل می‌کنند و با آلاینده‌ها واکنش نمی‌دهند؛ بنابراین قدرت پاک‌کنندگی صابون، به میزان توانایی آن در انجام برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای با آلاینده‌های موجود در محیط بستگی دارد نه انجام واکنش شیمیایی با آن‌ها! *مواستون پاشه تو را ۴ این عبارت‌ها نیتید!*

۹۸- گزینه ۱

۱) **گام** باز اولیه، قوی و تک‌ظرفیتی (MOH) است؛ بنابراین هر مول از آن با یک مول نیتریک اسید (HNO_3) به طور کامل خنثی می‌شود و pH آن به ۷ می‌رسد:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-10}$$

$$\rightarrow [H^+][OH^-] = 10^{-14} \rightarrow [OH^-] = 10^{-4} \Rightarrow \text{غلظت محلول} = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{mol } HNO_3 = 10^{-2} \Rightarrow \text{mol } MOH = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \times 100 \text{ L} = 100 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow \text{جرم } HNO_3 = 10^{-2} \text{ mol} \times \frac{63 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 63 \times 10^{-2} \text{ g}$$

۲) **گام** اسید اولیه، قوی و تک‌پروتون‌دار (HA) است؛ بنابراین هر مول از آن با ۱ مول سدیم هیدروکسید (NaOH) به طور کامل خنثی شده و pH آن به ۷ می‌رسد:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \text{ در محلول اولیه اسید (HA)}$$

$$\Rightarrow \text{غلظت محلول} = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{mol } NaOH = 10^{-2} \Rightarrow \text{mol } HA = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \times 100 \text{ L} = 100 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow \text{جرم } NaOH = 10^{-2} \text{ mol} \times \frac{40 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 40 \times 10^{-2} \text{ g}$$

۳) **گام** محاسبه نسبت جرم HNO_3 به NaOH:

$$\frac{\text{جرم } HNO_3}{\text{جرم } NaOH} = \frac{63 \times 10^{-2}}{40 \times 10^{-2}} = \frac{63}{40} = \frac{60}{40} + \frac{3}{40} = 1.5 + 0.075 = 1.575$$

۹۹- گزینه ۲

نکته ۱

در سلول گالوانی: الکترود با E° کوچک‌تر ← آند سلول
الکترود با E° بزرگ‌تر ← کاتد سلول

اما برخلاف پروپانئیک اسید نمی‌تواند با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی برقرار کند؛ از این رو نقطه جوش پایین‌تری دارد.

۹۵- گزینه ۲

عبارت‌های سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

۱) براساس مدل آرنیوس می‌توان اسید و باز را تشخیص داد، اما نمی‌توان درباره میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول اظهار نظر کرد.

۲) باریم اکسید (BaO) یک اکسید فلزی و بازی است. کاغذ pH در محلول‌های بازی به رنگ آبی درمی‌آید.

۳) در شرایط یکسان دما و غلظت، هر چه یک اسید تک‌ظرفیتی قوی‌تر باشد، ثابت یونش (K_a) بزرگ‌تری دارد و $[H^+]$ در آن بیشتر است.

۴) استیک اسید، یک اسید ضعیف بوده و به مقدار ناچیزی در آب یونیده می‌شود؛ بنابراین یک محلول الکترولیت ضعیف (با رسانایی کم) در آب ایجاد می‌کند ولی اتانول (الکل) به صورت کاملاً مولکولی در آب حل می‌شود و یونی از فرایند انحلال آن در آب، حاصل نمی‌شود، بنابراین محلول آن در آب، محلولی غیرالکترولیت است.

۵) **مشاوره** در عبارت سوم، منظور طراح از شرایط یکسان برای دو اسید، علاوه بر دما و غلظت، ظرفیت یکسان دو اسید هم بوده است. چون در صورت یکسان در نظر نگرفتن ظرفیت اسیدها، ممکن است K_a برای یک اسید بزرگ‌تر باشد ولی $[H^+]$ در محلول آن کم‌تر باشد. برای مثال در شرایط یکسان دما و غلظت، در $[H^+]$ H_2SO_4 (اسید دوظرفیتی) بیشتر از $[H^+]$ در HI (اسید یک‌ظرفیتی) است؛ ولی HI اسید قوی‌تری است.

۹۶- گزینه ۳

۱) **استراتژی** اول برای محلول نیتریک اسید از روی فرمول $[H^+] = M.n.\alpha$ ، $[H^+]$ رو به دست بیار. از اون‌جا که pH دو محلول اسیدی برابره؛ پس $[H^+]$ برای HA رو هم داری. بعد از رابطه ثابت تعادل (K_a)، غلظت مولار HA رو به دست بیار و به خواسته سؤال برس.

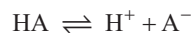
۲) **گام** به دست آوردن $[H^+]$ در اسید HA:

$$HNO_3: [H^+] = M.n.\alpha \xrightarrow{\alpha=1, n=1} [H^+] = M = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

در نتیجه $[H^+]$ در اسید HA هم برابر با 10^{-3} مولار است.

۳) **گام** به دست آوردن K_a در اسید HA:

با توجه به این که کلمه «تقریب» در سؤال ذکر شده، می‌توان نوشت:



$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \Rightarrow 2 \times 10^{-4} = \frac{(10^{-3})^2}{M}$$

صرف نظر می‌کنیم.

$$= 2 \times 10^{-4} = \frac{10^{-6}}{M} \Rightarrow M = 0.005 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{\text{غلظت مولی HA}}{\text{غلظت مولی HNO}_3} = \frac{0.005}{0.01} = 0.5$$

۴) **گام** رسیدن به خواسته سؤال:

۵) **تله** سنجش ۳ را به عنوان جواب سؤال داده ولی راستش طراح در این سؤال و گزینه‌هاش قبلی سوتی بدهی داده. اگر در رابطه ثابت تعادل از $[H^+]$ در مخرج صرف نظر نکنیم، به ۴ یعنی عدد ۶ می‌رسیم!

بدون صرف نظر کردن $[H^+]$ در مخرج رابطه ثابت تعادل داریم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \Rightarrow 2 \times 10^{-4} = \frac{(10^{-3})^2}{M - 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow 2 \times 10^{-4} = \frac{10^{-6}}{M - 10^{-3}} \Rightarrow 2M - 2 \times 10^{-3} = 10^{-2}$$



مشاوره اگر روش محاسبه عدد اکسایش اتم‌ها را در ساختار لوویس گونه‌ها بلد باشی ولی مولکول‌ها و گونه‌های موجود در کتاب درسی رو نشناسی و روی ساختارشون تسلط نداشته باشی، نمی‌تونی این مدل سؤال‌ها رو حل کنی. پس روی به خاطر سپردن نام و ساختار مولکول‌ها و یون‌های چنداتی به خصوص مولکول‌های آلی حسابی کار کن.

۱۰۱- گزینه ۳

براساس مدل دریای الکترونی، ساختار فلزها، آرایش منظمی از کاتیون‌ها در سه بعد است که در فضای میان آن‌ها، سست‌ترین الکترون‌های موجود در اتم (الکترون‌های ظرفیت)، دریایی را ساخته‌اند و در آن آزادانه جابه‌جا می‌شوند.

۱۰۲- گزینه ۱

نکته ۱ هر چه نیروهای جاذبه میان ذره‌های سازنده یک ماده خالص، قوی‌تر باشد، تفاوت نقطه ذوب و جوش آن بیشتر بوده و بنابراین در گستره دمایی بیشتری به حالت مایع است. **۲** مواد مولکولی، نقطه ذوب و جوش پایین‌تری نسبت به مواد یونی دارند و گستره دمایی که در آن، مواد مولکولی به حالت مایع هستند، خیلی کمتر از گستره دمایی مایع‌بودن مواد یونی است. هر ماده‌ای که در گستره دمایی بیشتری به حالت مایع باشد (تفاوت بین نقطه ذوب و جوش آن بیشتر باشد)، می‌تواند انرژی گرمایی را بیشتر (برای مدت طولانی‌تری) نگه دارد. H_2O ، N_2 و HF جزء مواد مولکولی هستند و گستره دمایی که در آن، این مواد به حالت مایع هستند، خیلی کمتر از گستره دمایی مایع‌بودن ترکیب‌های یونی، مانند KCl است.

۱۰۳- گزینه ۲

نکته تنها عاملی که می‌تواند مقدار ثابت تعادل (K) را در یک واکنش تعادلی، تغییر دهد، دما است.

اثر تغییر دما بر ثابت تعادل

(۱) اگر با افزایش دما، ثابت تعادل افزایش یابد، واکنش در جهت رفت گرماگیر بوده و $K_{\text{جدید}} > K_{\text{اولیه}}$ می‌باشد.

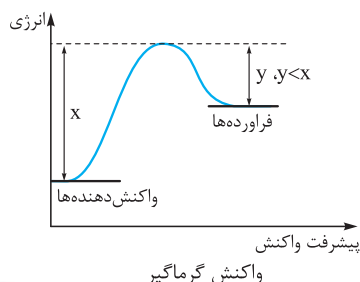
(۲) اگر با افزایش دما، ثابت تعادل کاهش یابد، واکنش در جهت رفت گرماگیر (و در جهت برگشت گرماگیر) بوده و $K_{\text{جدید}} < K_{\text{اولیه}}$ می‌باشد.

موارد اول، دوم و پنجم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: موارد اول و دوم: از اون‌هایی که با افزایش دما، ثابت تعادل افزایش یافته است، نتیجه می‌گیریم که واکنش گرماگیر ($\Delta H > 0$) است.

موارد سوم: طبق اصل لوشاتلیه، در واکنش‌های گرماگیر، با افزایش دما، تعادل در جهت مصرف گرما؛ یعنی در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

موارد چهارم و پنجم: در واکنش‌های گرماگیر، محتوا یا سطح انرژی فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر بوده و سطح انرژی فراورده‌ها به سد انرژی یا همان ذره تشکیل شده در قله نمودار انرژی، نزدیک‌تر است.



۲ هر چه اختلاف مقدار E° کاتد و آند در یک سلول گالوانی بیشتر باشد، براساس رابطه $\text{emf} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$ ، مقدار ولتاژ سلول گالوانی (emf) بیشتر خواهد بود.

در سلول‌های گالوانی، الکتروپا E° کمتر، نقش آند و الکتروپا E° بیشتر، نقش کاتد را دارد. با توجه به این‌که در سری الکتروشیمیایی، از بالا به پایین، E° الکترودها کاهش می‌یابد، خواهیم داشت:



سلول (A-D): A کاتد $\Leftarrow E^\circ(A)$ بیشتر

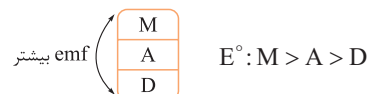


سلول (D-M): M کاتد $\Leftarrow E^\circ(M)$ بیشتر



سلول (A-M): A آند $\Leftarrow E^\circ(A)$ کمتر

پس جایگاه عنصرهای داده‌شده در سری الکتروشیمیایی به صورت زیر است:



هر چه تفاوت E° دو الکتروپا بیشتر باشد، emf سلول حاصل از آن‌ها بیشتر خواهد بود.

۱۰۰- گزینه ۴

درس‌نامه تعیین عدد اکسایش به روش رسم ساختار لوویس:

برای تعیین عدد اکسایش اتم‌ها، در مواد مولکولی یا یون‌های چنداتی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

شمار الکترون‌های نسبت داده شده به اتم - شمار الکترون‌های ظرفیت اتم = عدد اکسایش اتم
برای تعیین شمار الکترون‌های نسبت داده شده به هر اتم، پس از رسم ساختار لوویس گونه مورد نظر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

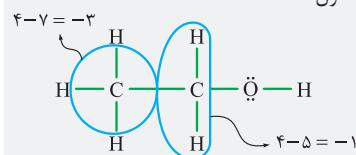
۱ به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم یکسان، یک الکترون به هر اتم نسبت می‌دهیم.
۲ به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم متفاوت، هر دو الکترون را به اتم با خصلت نافلزی بیشتر، نسبت می‌دهیم.

توجه: مقایسه خصلت نافلزی چند عنصر زیر را بلد باشیم:

$F > O > N > Cl > Br > I > S > C > H$ خصلت نافلزی

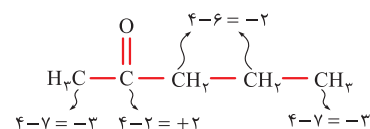
۳ همه الکترون‌های ناپیوندی روی هر اتم را به همان اتم نسبت می‌دهیم.

مثال: محاسبه عدد اکسایش اتم‌های کربن در اتانول:

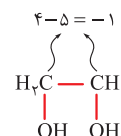


باید همه گزینه‌ها را بررسی کنیم:

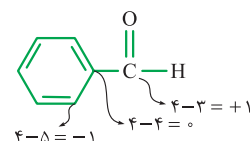
➡ پنتانول ۲- پنتانول



➡ اتیلن گلیکول ۲



➡ بنزالدهید ۳





۱۰۵- گزینه ۳

گام ۱ برای قسمت اول سؤال، کافیه رابطه ثابت تعادل را بنویسیم و با جای گذاری غلظت‌های تعادلی، مقدار K را به دست بیاریم:

$$X_2(g) + 3D_2(g) \rightleftharpoons 2A(g)$$

$$K = \frac{[A]^2}{[X_2][D_2]^3} = \frac{(\frac{1}{3})^2}{(\frac{0}{6})(\frac{0}{3})^3} = \frac{(\frac{0}{5})^2}{(\frac{0}{2})(\frac{0}{3})^3} = \frac{3^3}{0/1} = 27$$

گام ۲ برای قسمت دوم سؤال، فرض رو بر این قرار می‌دهیم که در ابتدای واکنش خبری از A(g) نبوده و فقط واکنش‌دهنده‌ها در ظرف واکنش وجود داشته‌اند! حالا فقط کافیه مقدار مول D_۲ مصرفی (لازم) برای تولید ۱/۵ مول A را به دست آوریم:

$$D_2 \text{ مصرفی } = 1/5 \text{ mol A} \times \frac{3 \text{ mol D}_2}{2 \text{ mol A}} = 2/25 \text{ mol D}_2$$

گام ۳ در نهایت با داشتن مقدار مول مصرفی D_۲ و مول تعادلی آن، مقدار مول D_۲ در آغاز واکنش به دست می‌آید:

$$D_2 \text{ مول اولیه} = D_2 \text{ تعادلی} + D_2 \text{ مصرفی} = 0/5 + 2/25 = 2/75 \text{ mol D}_2$$



۱۰۴- گزینه ۱

کاتالیزگر این موارد را تغییر می‌دهد. کاتالیزگر این موارد را تغییر نمی‌دهد.

- انرژی فعال‌سازی واکنش - سطح انرژی ذره تشکیل‌شده - در قله نمودار انرژی - زمان انجام واکنش	کاهش	- سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ΔH واکنش - مقدار نهایی فراورده‌ها
- سرعت واکنش - پایداری ذره تشکیل‌شده - در قله نمودار انرژی	افزایش	

تله ممکنه دچار اشتباه شوید که: چون کاتالیزگر سرعت واکنش را زیاد می‌کند، پس در حضور آن، فراورده بیشتری هم تولید می‌شود، که کاملاً برداشت نادرستیه. کاتالیزگر، سرعت واکنش را زیاد می‌کند، یعنی کاری می‌کنه که واکنش‌دهنده‌ها در زمان کم‌تری به فراورده تبدیل شوند. این‌که چه مقدار فراورده تولید می‌شه دیگه به کاتالیزگر ربطی نداره.